# Elliptische Wurzelfunktionen.

---

Inaugural-Dissertation

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg zur Erlangung der Doktorwürde

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

**Karl Stuckenberg**
aus Bremen.

**Borna-Leipzig**
Buchdruckerei Robert Noske
1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548002_0102

Meiner lieben Mutter gewidmet.

# Inhaltsverzeichnis.


Seite

Einleitung . . . . . 1

§ 1. Einige Vorbemerkungen aus der Transformationstheorie . . . . . 5

§ 2. Die doppelt periodische Funktion zweiter Art: $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ . . . . . 11

§ 3. Darstellungen durch Thetaquotienten . . . . . 18

§ 4. Reihenentwicklung der Funktion $f_{\alpha\beta}(w)$ . . . . . 30

§ 5. Darstellungen der doppelt periodischen Funktion $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ durch die Weierstraßsche p-Funktion . . . . . 40

§ 6. Eine Hilfsuntersuchung über die $\lambda$-Funktion . . . . . 46

§ 7. Darstellung von $f_{\alpha\beta}(w)$ als Summe von $\Lambda$-Funktionen. Auswertung des Integrals $\int f_{\alpha\beta}(w)\,dw$ . . . . . 50

# Einleitung.

Vom Standpunkt der Weierstraßschen Theorie ausgehend führt die Transformation der elliptischen Funktionen ebenso wie ihre Multiplikation und Division auf gewisse Funktionen $f(w)$, deren $n$te Potenz doppelt periodisch ist, und die also selber zu den elliptischen Funktionen zweiter Art zählen. Im Falle $n = 2$ sind das die bekannten Funktionen

$$f_i(w) = \sqrt{p(w) - e_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

die Weierstraß an die Stelle der alten Funktionen

$$\sin \operatorname{am} w, \quad \cos \operatorname{am} w, \quad \Delta \operatorname{am} w$$

gesetzt hat, und die sich, wie Klein (Math. Annalen 27 S. 457; „Hyperelliptische $\sigma$-Funktionen") gezeigt hat, neben anderen Vorzügen eines einheitlichen Additionstheorems erfreuen. Die Verallgemeinerung auf $n > 2$ ist zuerst Kiepert gelungen (Crelles Journal 76 S. 34: „Auflösung der Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Funktionen"), der die große Bedeutung der Wurzelfunktionen $f(w)$ ausdrücklich hervorhebt. Und in der Tat haben diese Funktionen seither eine wichtige Rolle gespielt. In einer Vorlesung über „Transformation der elliptischen Funktionen", Sommersemester 1893, ist auch Christoffel auf diese Funktionen gestoßen; mit den Fragestellungen und, wo es nötig war, auch mit den Ansätzen dieser Vorlesung hat mich Herr Prof. Wellstein bekannt gemacht und mich angeregt, die Christoffelschen Resultate, soweit sie die Wurzelfunktionen und ihren Zusammenhang mit dem Transformationsproblem betreffen, auf rein funktionentheoretischem Wege abzuleiten, und so ist die nachfolgende Arbeit zustande gekommen. Es gelang, das gesteckte Ziel fast ausschließlich mittels der streng Riemannschen Methode zu erreichen, die eine Funktion nur durch ihre Un-

stetigkeiten charakterisiert. Da es also auf die Darstellungsform der elliptischen Funktionen gar nicht ankam, so habe ich als Unterlage der Theorie die ungerade $\vartheta$-Funktion genommen, die sonst bekanntlich größere Schwierigkeiten bereitet als die $\sigma$-Funktion. Der Vollständigkeit halber mußten auch einige bekannte Resultate wiederholt werden.

Da es in der Theorie der elliptischen Funktionen keine einheitliche Bezeichnungsweise gibt, wollen wir, bevor wir in die Behandlung des Gegenstandes eintreten, eine Zusammenstellung aller der Funktionen geben, die wir im folgenden benutzen werden. Um aber die Resultate auch in andere Bezeichnungsweisen übersetzen zu können, geben wir an, wie die von uns benutzten Funktionen mit anderen gebräuchlichen zusammenhängen. Wir benutzen also die ungerade $\vartheta$-Funktion mit den primitiven Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$

$$\vartheta(w) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)x ,$$

(1) wo

$$x = \frac{\pi w}{\omega_1} \qquad q = e^{\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

ist. Ihr Verhalten gegenüber den Perioden ist

$$\vartheta(w+\omega_1) = -\vartheta(w)$$

(2)
$$\vartheta(w+\omega_2) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(\omega_1+\omega_2+2w)} \cdot \vartheta(w) .$$

Aus (1) folgt weiter

(3) $$\vartheta(-w) = -\vartheta(w) \text{ und } \vartheta(0) = 0 .$$

Eine oft gebrauchte Formel ist

(4) $$\lim_{w=0} \frac{\vartheta(w)}{w} = \vartheta'(0) .$$

In der Jacobischen Theorie ist diese Funktion mit $\vartheta_1(w)$, in der Weberschen mit $\vartheta_{11}(w)$ bezeichnet. Mit der Funktion $\sigma(w)$ der Weierstraßschen Theorie hängt $\vartheta(w)$ durch eine Relation von der Form

$$\sigma(w) = e^{\alpha w^2} \vartheta(w)$$

zusammen, wo $\alpha$ eine Konstante ist.

Während für die logarithmische Derivierte von $\sigma(w)$ die Bezeichnung $\zeta(w)$ allgemein üblich ist, hat man für die logarithmische Derivierte der $\vartheta$-Funktion noch keine allgemeine Bezeichnung eingeführt. Wir werden diese Funktion ständig mit $\lambda(w)$ bezeichnen; also

$$\lambda(w) = \frac{d \log \vartheta(w)}{d w} = \frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)} . \tag{5}$$

Man sieht leicht, daß

$$\begin{gathered} \lambda(w + \omega_1) = \lambda(w) \\ \lambda(w + \omega_2) = \lambda(w) - \frac{2\pi i}{\omega_1} \\ \lambda(-w) = -\lambda(w) \end{gathered} \tag{6}$$

ist. Im Punkte $w = 0$ hat $\lambda(w)$ einen Pol erster Ordnung, da $\vartheta(w)$ dort verschwindet. Also gilt die Entwicklung

$$\text{in } w = 0 : \lambda(w) = \frac{1}{w} + c\,w + c_1 w^3 + \cdots . \tag{7}$$

Die Weierstraßsche p-Funktion, die wir häufig gebrauchen werden, definieren wir durch

$$c - \lambda'(w) = p(w) . \tag{8}$$

Es gilt in der Umgebung von $w = 0$

$$p(w) = \frac{1}{w^2} - 3 c_1 w^2 - \cdots . \tag{9}$$

$p(w)$ ist eine gerade, doppelt periodische Funktion, die im Punkte $w = 0$ einen Pol zweiter Ordnung hat. Dieselben Pole, aber zwei Nullgitter erster Ordnung mit den Anfangspunkten $w = \pm v$, hat die Funktion

$$p(w) - p(v) = \vartheta'(0)^2 \frac{\vartheta(v + w)\ \vartheta(v - w)}{\vartheta(w)^2 \cdot \vartheta(v)^2} . \tag{10}$$

$p(w)$ genügt der Differentialgleichung

$$p'^2 = 4 p^3 - g_2 p - g_3 , \tag{11}$$

wo $g_2$, $g_3$ Konstanten, die sogen. Invarianten sind. Wir benutzen also die durch (1) bezw. (5) und (8) definierten Funktionen

$$\vartheta(w),\ \lambda(w),\ p(w) .$$

Wir stellen noch eine Reihe von Sätzen aus der Funktionen-

theorie und der Theorie der elliptischen Funktionen zusammen, auf die wir uns im folgenden häufiger berufen werden.

Satz I. Für eine eindeutige analytische Funktion endlicher Ordnung $f(w)$ ist die Anzahl der Nullpunkte vermindert um die Anzahl der Unendlichkeitspunkte im Innern eines Flächenstückes gleich dem Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log f(w)\, dw$$

positiv um die Begrenzung des Flächenstücks herum integriert, wobei jeder Nullpunkt und Pol so oft zu rechnen ist, als seine Ordnungszahl angibt.

Satz II. Eine doppelt periodische analytische Funktion $f(w)$ mit Nullpunkten und Unendlichkeitspunkten endlicher Ordnung ist durch diese Punkte und ihre Ordnungen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, und zwar hat sie in jedem Periodenparallelogramm, auf dessen Umfang solche Punkte nicht liegen, genau soviel Nullpunkte wie Unendlichkeitspunkte, wenn man jeden so oft zählt, als seine Ordnungszahl angibt; und dann ist das Abelsche Theorem die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lage dieser Punkte, damit sie die Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte der doppelt periodischen Funktion sein können.

In Zeichen:

Sind $c_1, \cdots, c_r$ die Nullpunkte mit den Ordnungszahlen $n_1, \cdots, n_r$ und $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ die Pole mit den Ordnungszahlen $\nu_1, \cdots, \nu_s$, so gilt

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s$$

$$n_1 c_1 + n_2 c_2 + \cdots + n_r c_r - \nu_1 \gamma_1 - \cdots - \nu_s \gamma_s = M\,\omega_1 + N\,\omega$$

(Abelsches Theorem),

und die Funktion lautet

$$f(w) = \text{const.}\; e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1} N \cdot w}\, \frac{\vartheta(w - c_1)^{n_1} \cdots \vartheta(w - c_r)^{n_r}}{\vartheta(w - \gamma_1)^{\nu_1} \cdots \vartheta(w - \gamma_s)^{\nu_s}}.$$

Satz III. Für eine doppelt periodische analytische Funktion ist die Summe der Residuen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_\omega} f(w)\,dw = 0$$

positiv um das Periodenparallelogramm integriert (Residuensatz).

Satz IV. Eine doppelt periodische analytische Funktion, die im Periodenparallelogramm keine Unstetigkeit hat — also dort nirgends unendlich wird — ist eine Konstante.

Satz V. Jede doppeltperiodische analytische Funktion endlicher Ordnung läßt sich als rationale Funktion von $p(w)$ und $p'(w)$ darstellen.

§ 1.

## Einige Vorbemerkungen aus der Transformationstheorie.

### 1. Die Transformation der Perioden.

Sind uns die Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ gegeben:

$$\omega_1 = x_1 + i y_1$$
$$\omega_2 = x_2 + i y_2, \tag{1}$$

so soll der Punkt $\omega_2$ auf der linken Seite des von 0 nach $\omega_1$ gerichteten Vektors liegen (s. Fig. 1).

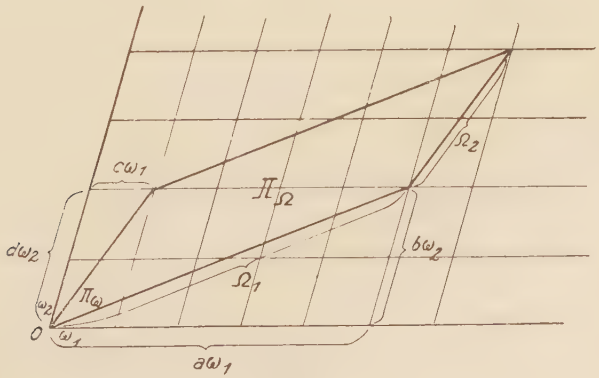


Fig. 1.

Es ist dann bekanntlich der Inhalt des Periodenparallelogramms

$$\Pi_\omega = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

und zwar ist immer

$$\Pi_\omega > 0. \tag{2a}$$

Wir wollen auf die Perioden eine Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c, d anwenden, d. h. wir wollen ansetzen

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= a\,\omega_1 + b\,\omega_2 \\ \Omega_2 &= c\,\omega_1 + d\,\omega_2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Dann wird der Inhalt des aus $\Omega_1$ und $\Omega_2$ gebildeten Parallelogramms

$$\Pi_\Omega = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \Pi_\omega \tag{4}$$

sein. Wir wollen voraussetzen, daß

$$n = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$$

ist, dann folgt

$$\Pi_\Omega \geqq \Pi_\omega, \tag{5}$$

und es liegt also auch $\Omega_2$ links von dem von 0 nach $\Omega_1$ zielenden Vektor.

## 2. Bestimmung der Anzahl der Gitterpunkte des $\omega$-Gitters in $\Pi_\Omega$. (Erste Methode.)

Zunächst wollen wir die Anzahl N der Gitterpunkte des $\omega$-Gitters $\omega_{\mu\nu} = \mu\,\omega_1 + \nu\,\omega_2$ bestimmen, die in einem aus $\Omega_1$ und $\Omega_2$ gebildeten Periodenparallelogramm liegen. Wir bewirken durch passende Ausbiegung der Seiten dieses Parallelogramms (s. Fig. 2), daß keine Gitterpunkte auf den Umfang des Parallelogramms fallen.

Da die $\vartheta$-Funktion in jedem $\Pi_\omega$ eine Nullstelle erster Ordnung hat, so ist die gesuchte Zahl N auch die Anzahl der

Nullstellen erster Ordnung von $\vartheta(w)$ in $\Pi_\Omega$. Nach Satz I der Einleitung ist also

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_\Omega} d \ln \vartheta(w)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Pi_\Omega} \lambda(w)\, dw, \qquad \text{nach (5) der Einleitung}$$

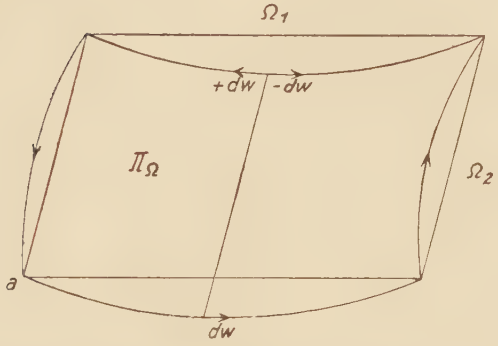


Fig. 2.

positiv um das Periodenparallelogramm integriert. Also ist

(6) $$N = \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+\Omega_1} [\lambda(w) - \lambda(w+\Omega_2)]\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+\Omega_2} [\lambda(w) - \lambda(w+\Omega_1)]\, dw.$$

Nun ist

$$\lambda(w+\Omega_1) = \lambda(w + a\omega_1 + b\omega_2)$$
$$= \lambda(w) - \frac{2\pi i b}{\omega_1}$$

nach (6) der Einleitung, und ebenso

$$\lambda(w+\Omega_2) = \lambda(w) - \frac{2\pi i d}{\omega_1}.$$

Setzen wir das in Gleichung (6) ein und führen die Integration aus, so folgt

(6a) $$N = \frac{d\Omega_1}{\omega_1} - \frac{b\Omega_2}{\omega_1} = \frac{a d \omega_1 + b d \omega_2 - b c \omega_1 - b d \omega_2}{\omega_1}$$

$$= a d - b c = n.$$

In $\Pi_\Omega$ liegen n Gitterpunkte des $\omega$-Gitters.

### 3. Zweite Methode zur Bestimmung von N.

Hiermit ist eine geometrische Tatsache auf transzendentem Wege erwiesen. Da das unbefriedigend ist, wollen wir dasselbe nochmals direkt nachweisen. Dazu ist eine Vereinfachung der Transformationsformeln (3) erforderlich. Definieren wir die Matrizen $\Omega$ und $\omega$ durch

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ \Omega_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

und bezeichnen wir mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Matrix der Transformation, so können wir an Stelle der Gleichungen (3) die Matrizengleichung

$$\Omega = M \cdot \omega \tag{7}$$

schreiben, wie aus dem bekannten Multiplikationsgesetz der Matrizen folgt.

Aus dem unter 1 Gesagten geht hervor, daß eine Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

deren Determinante $|Q| = 1$ ist, den Inhalt des Periodenparallelogramms $\Pi_\Omega$ nicht ändert. Wir können also M mit mehreren Matrizen Q multiplizieren, ohne die Zahl N zu ändern.

Wir wählen zunächst

$$Q = E_{12}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wo t eine ganze Zahl ist. Dann wird

$$E_{12}(t) \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\,t & b + c\,t \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Durch passende Wahl der ganzen Zahl t läßt es sich immer erreichen, daß

$$|b'| < |d|$$

wird. Multiplizieren wir die so erhaltene Matrix

$$M' = E_{12}(t)\, M = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

von links her mit der Matrix

$$E_{21}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$E_{21}(t) \cdot M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c + t\,a' & d + t\,b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Durch passende Wahl der ganzen Zahl t bewirken wir, daß

$$|d'' | = |d + t\,b'| < |b'|$$

wird. Durch linksseitige Multiplikation mit einer Matrix $E_{12}(t)$ erhalten wir dann wieder ein

$$|b''' | = |b'' + t\,d''| < |d''| < |b'|.$$

Indem wir dieselbe Schlußweise wiederholen, erhalten wir für die b eine ständig abnehmende Reihe ganzer Zahlen, in der schließlich einmal die Null auftreten muß. Dann hat M die Form

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

und hierin ist $b_1$ als Hauptteiler von b und d eindeutig festgelegt und damit, wenn n gegeben ist, auch $a_1 = \frac{n}{b_1}$.

Durch Bildung von

$$E_{21}(t) \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 + a_1\,t & b_1 \end{pmatrix}$$

mit passendem, ganzzahligen t machen wir schließlich

$$|c^*| = |c_1 + a_1\,t| < |a_1|.$$

Bezeichnet jetzt Q das Produkt der links vor M getretenen Faktoren vom Typus $E_{12}(t)$ und $E_{21}(t)$, so haben wir

$$M^* = Q \cdot M = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ c^* & b^* \end{pmatrix} \text{ und } |c^*| < |a^*|.$$

Da nun, infolge $|Q| = 1$, die Determinante von $M^*$ gleich der von M ist, so wird der Inhalt des Periodenparallelogramms durch die Änderung der a, b, c, d nicht betroffen, d. h. also: die All-

gemeinheit unserer Betrachtungen wird nicht beschränkt, wenn wir als Transformationsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \tag{8}$$

wählen, wo $a\,b = n$ ist und c einen der Werte $0, 1, \cdots, a—1$ annehmen kann, d. h. durch passende, den Inhalt eines $\Pi_\Omega$-Parallelogramms nicht ändernde Umordnung des $\Omega$-Gitters läßt es sich stets erreichen, daß eine Transformation des $\omega$-Gitters in das $\Omega$-Gitter die Form

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= a\,\omega_1 \\ \Omega_2 &= c\,\omega_1 + b\,\omega_2, \quad c = 0, 1, 2, \cdots, a—1 \end{aligned} \tag{9}$$

annimmt. Dann ist also

$$\Pi_\Omega = a \cdot b \cdot \Pi_\omega .$$

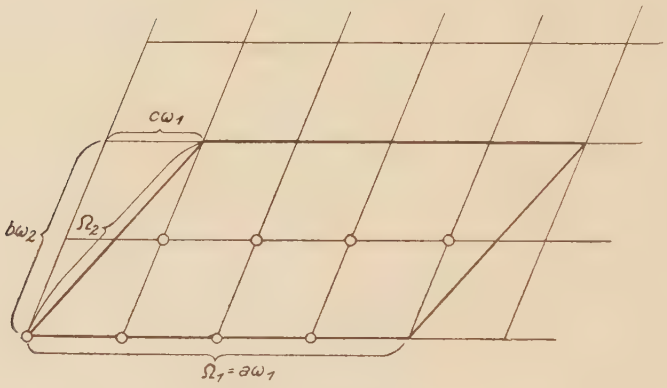


Fig. 3.

Konstruieren wir in diesem spezialisierten Fall die beiden Periodengitter, so zeigt ein Blick auf die Figur, daß $a \cdot b = n$ Gitterpunkte des $\omega$-Gitters in einem $\Pi_\Omega$ liegen müssen. Damit ist diese Tatsache auch auf geometrischem Wege erwiesen.

Für die Anzahl Z aller verschiedenen Transformationen vom Grade n ergibt sich aus der Form (8) leicht folgende bekannte Formel. Es sei in Primfaktoren zerlegt:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} ,$$

dann ist

$$(10) \qquad Z = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1}.$$

### 4. Allgemeine Festsetzungen.

Wir wollen im folgenden ein für allemal unter den Größen a, b, c die Elemente der Transformationsmatrix (8) verstehen. Ferner setzen wir zur Vereinfachung der Bezeichnung fest, daß Funktionen und Größen, die zu den transformierten Perioden gehören, mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet werden sollen. So haben wir diese Perioden selbst schon als $\Omega_1$ und $\Omega_2$ eingeführt. Ebenso werden wir die p-Funktion dieses Gitters mit P(w), die $\vartheta$-Funktion mit $\Theta$(w) bezeichnen usw.

§ 2.

## Die doppelt periodische Funktion zweiter Art: $\varphi_{\alpha\beta}(w)$.

Wir bilden uns mit Hilfe der Weierstraßschen p-Funktion Ausdrücke, denen wir nach und nach den Charakter von elliptischen Funktionen zweiter Art aufprägen.

### 1. Verhalten zur Periode $\omega_1$.

Ist P(w), wie in § 1, 4 festgesetzt, die p-Funktion mit den Perioden $\Omega_1$ und $\Omega_2$, so bilden wir nach Art der Lagrangeschen Resolventen die folgende Summe:

$$(1) \qquad \psi_\lambda(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}); \quad \omega_{\varkappa\lambda} = \varkappa\omega_1 + \lambda\omega_2.$$

Hier ist $\lambda$ zunächst eine beliebige ganze Zahl. Dieser Funktion wollen wir die Periodeneigenschaft

$$(2) \qquad \psi_\lambda(w + \omega_1) = \varrho\,\psi_\lambda(w)$$

mit konstantem $\varrho$ vorschreiben. Daraus werden wir für die noch unbestimmte Größe $\varrho$ eine sehr einfache Bedingung erhalten. Es ist nämlich

$$\psi_\lambda(w + \omega_1) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa+1,\lambda}),$$

und wenn ich $\varrho$ als Faktor vorziehe

$$= \varrho \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-(\varkappa+1)} P(w + \omega_{\varkappa+1,\lambda}).$$

Ich setze $\varkappa + 1 = \varkappa'$ und setze wieder $\varkappa$ dafür, dann ist

$$\psi_\lambda(w + \omega_1) = \varrho \sum_{\varkappa=1}^{a} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}),$$

und hierin fehlt gegenüber der Summe für $\psi_\lambda(w)$ das Glied mit $\varkappa = 0$, wogegen das mit $\varkappa = a$ neu auftritt. Nun ist

$$P(w + \omega_{a\lambda}) = P(w + a\omega_1 + \lambda\omega_2) = P(w + \Omega_1 + \omega_{0\lambda})$$
$$= P(w + \omega_{0\lambda}).$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\psi_\lambda(w + \omega_1) = \varrho\,\psi_\lambda(w)$ wird, ist also

(3) $$\varrho^{-a} = 1.$$

Wir untersuchen weiter das Verhalten der Funktion $\psi_\lambda(w)$ gegenüber der Periode $\omega_2$. Hier ist ganz einfach, wie sofort aus der Definition folgt:

(4) $$\psi_\lambda(w + \omega_2) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa,\lambda+1}) = \psi_{\lambda+1}(w).$$

Zugleich sehen wir, daß es vollkommen genügen wird, wenn wir $\lambda$ die Werte 0, 1, ⋯, b—1 durchlaufen lassen. Denn bilden wir die Funktion $\psi_b(w)$, so können wir sie leicht folgendermaßen umformen

$$\psi_b(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa,0} + b\omega_2),$$

und da $b\omega_2 = \Omega_2 - c\omega_1$ ist,

$$= \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \Omega_2 - c\omega_1 + \omega_{\varkappa 0})$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa 0} - c\omega_1).$$

Andrerseits ist aber:

$$\psi_0(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \varrho^{-\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa,0}),$$

und es ergibt sich

$$\psi_b(w) = \psi_0(w - c\,\omega_1)$$

$$= \varrho^{-c}\psi_0(w). \tag{5}$$

Ebenso läßt sich jedes andere $\psi_\lambda(w)$ auf eine der Funktionen $\psi_0(w), \ldots, \psi_{b-1}(w)$ zurückführen.

## 2. Verhalten zur Periode $\omega_2$.

Die Funktion $\psi_\lambda(w)$ ist noch nicht das Ziel unserer Betrachtungen. Wir müssen vielmehr eine Funktion aufzustellen suchen, die auch bei Vermehrung des Arguments um $\omega_2$ einen von w unabhängigen Faktor absondert. Eine solche Funktion finden wir in

$$\varphi(w) = \sum_{\lambda=0}^{b-1} \sigma^{-\lambda}\psi_\lambda(w), \tag{6}$$

wo die Größe $\sigma$ noch zu bestimmen ist. Aus unseren obigen Ausführungen ergibt sich:

$$\varphi(w + \omega_1) = \varrho\varphi(w). \tag{6 a}$$

Wir wollen verlangen, daß

$$\varphi(w + \omega_2) = \sigma\varphi(w) \tag{6 b}$$

wird. Führen wir das aus, so finden wir

$$\varphi(w + \omega_2) = \sum_{\lambda=0}^{b-1} \sigma^{-\lambda}\psi_{\lambda+1}(w) \qquad \text{nach (4)}$$

$$= \sigma \sum_{\lambda=0}^{b-1} \sigma^{-(\lambda+1)}\psi_{\lambda+1}(w).$$

Wir setzen wieder $\lambda + 1 = \lambda' = \lambda$ und erhalten

$$\varphi(w + \omega_2) = \sigma \cdot \sum_{\lambda=0}^{b} \sigma^{-\lambda}\psi_\lambda(w).$$

Im Vergleich zu (6) fehlt in dieser Summe $\psi_0(w)$, und es ist neu in dieser Summe $\sigma^{-b}\psi_b(w)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\varphi(w + \omega_2) = \sigma\varphi(w)$ sei, lautet also

$$\psi_0(w) = \sigma^{-b}\psi_b(w)$$

oder wegen Gleichung (5)

$$\psi_0(w) = \sigma^{-b} \cdot \varrho^{-c} \psi_0(w),$$

also

(7) $$\varrho^{-c} \sigma^{-b} = 1.$$

### 3. Zusammenstellung der Resultate.

Wir fassen die Betrachtungen der ersten beiden Abschnitte kurz zu dem Satz zusammen:

Definiert man eine Funktion $\varphi(w)$ durch den Ausdruck

(8) $$\varphi(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa} \cdot \sigma^{-\lambda} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

unter der Voraussetzung, daß

$$\varrho^a = 1 \quad \varrho^c \sigma^b = 1$$

ist, so hat diese Funktion die Periodeneigenschaften:

(6 a u. b) $$\varphi(w + \omega_1) = \varrho\, \varphi(w),$$
$$\varphi(w + \omega_2) = \sigma\, \varphi(w).$$

Hierbei kann $P(w)$ zunächst noch jede Funktion mit den Perioden $\Omega_1$ und $\Omega_2$ sein; im folgenden wollen wir aber, wie vereinbart, darunter die p-Funktion mit den Perioden

$$\Omega_1 = a\, \omega_1,$$
$$\Omega_2 = c\, \omega_1 + b\, \omega_2$$

verstehen.

Da $ab = n$ ist, so finden wir, daß

$$(\varrho^a)^b = \varrho^n = 1$$

und ebenso

$$\sigma^n = (\sigma^b)^a = \left(\frac{1}{\varrho^c}\right)^a = 1$$

ist; $\varrho$ und $\sigma$ sind n te Einheitswurzeln. Mit dem so definierten $\varphi(w)$ haben wir eine Funktion gewonnen, die die Eigenschaft hat, bei Vermehrung des Arguments um die Perioden n te Einheitswurzeln als Faktoren abzusondern, während $\varphi(w)$ für die Perioden $\Omega_1$ und $\Omega_2$ doppelt periodisch ist. Offenbar muß dann

die n te Potenz von $\varphi(w)$ doppeltperiodisch für die Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ sein, also

$$(\varphi(w+\omega_1))^n = (\varphi(w))^n$$
$$(\varphi(w+\omega_2))^n = (\varphi(w))^n.$$

Doch sei schon hier vorausgeschickt, daß die Funktion $\varphi(w)$ noch nicht die gesuchte Verallgemeinerung der Funktionen $f_i(w)$ der Einleitung ist.

## 4. Genaue Bestimmung von $\varrho$ und $\sigma$. Die Funktion $\varphi_{\alpha\beta}(w)$.

In den bisherigen Ausführungen war festgestellt, daß $\varrho$ und $\sigma$ beliebige n te Einheitswurzeln sind. Da es deren n verschiedene gibt und $\varrho$, $\sigma$ mit jeder dieser Wurzeln zusammenfallen können, so erhalten wir im ganzen $n^2$ Funktionen $\varphi(w)$, die zu derselben Transformationsmatrix gehören. Alle wesentlich verschiedenen Funktionen ergeben sich durch die folgende Betrachtung:

Die Gleichung (3) lautete

$$\varrho^a = 1.$$

Daher ist

$$\varrho = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}}, \tag{3 a}$$

wo $\alpha$ die Werte 0, 1, $\cdots$, a — 1 annehmen kann. Nimmt $\alpha$ diese Werte der Reihe nach tatsächlich an, so durchläuft $\varrho$ die sämtlichen a ten Einheitswurzeln. Nach Gleichung (7) hat dann $\sigma^b = \varrho^c$ die Form

$$\sigma^b = \frac{1}{\varrho^c} = e^{-\frac{2\pi i \alpha c}{a} + 2\pi i \beta},$$

wo $\beta$ eine ganze Zahl ist. Daraus bestimmt sich

$$\sigma = e^{-\frac{2\pi i \alpha c}{a b} + 2\pi i \frac{\beta}{b}} = e^{2\pi i \frac{a\beta - c\alpha}{a b}}, \tag{7 a}$$

und man erhält alle zulässigen Werte von $\sigma$, wenn $\beta$ die Werte 0, 1, $\cdots$, b — 1 annimmt. Wir definieren also ausführlicher

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} e^{-2\pi i \varkappa \frac{\alpha}{a} - 2\pi i \lambda \frac{a\beta - c\alpha}{a b}} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}), \tag{8 a}$$
$$\alpha = 0, 1, \cdots, a-1,$$
$$\beta = 0, 1, \cdots, b-1.$$

Aus den Gleichungen (6 a) und (6 b) wird dann

$$\varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_1) = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}} \varphi_{\alpha\beta}(w)$$

(6 c)

$$\varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_2) = e^{\frac{2\pi i (a\beta - c\alpha)}{a b}} \varphi_{\alpha\beta}(w).$$

## 5. Die Summe aller Funktionen $\varphi_{\alpha\beta}(w)$.

Zunächst sehen wir, daß die Anzahl aller so definierten Funktionen, die zu einer Transformationsmatrix gehören, gerade $a \cdot b = n$ ist; denn $\alpha$ kann a und $\beta$ kann b voneinander verschiedene Werte annehmen. Ich behaupte dann, es ist

(9)

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{\beta=0}^{b-1} \varphi_{\alpha\beta}(w) = n \cdot P(w).$$

Ist nämlich $\gamma$ eine h te Einheitswurzel, so ist bekanntlich

$$1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots \gamma^{h-1}$$

gleich h oder 0, je nachdem $\gamma = 1$ ist oder nicht. Daher ist

$$\sum_{\beta=0}^{b-1} e^{-2\pi i \frac{\beta\lambda}{b}} = \begin{cases} b \text{ für } \lambda = 0 \\ 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \cdots, b-1, \end{cases}$$

als b te Einheitswurzel und ebenso

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha\varkappa}{a}} = \begin{cases} a \text{ für } \varkappa = 0 \\ 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2, \cdots, a-1. \end{cases}$$

Also wird

$$\sum_{\beta=0}^{b-1} \varphi_{\alpha\beta}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha\varkappa}{a}} e^{2\pi i \lambda \frac{c\alpha}{a b}} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}) \cdot \sum_{\beta=0}^{b-1} e^{-2\pi i \frac{\beta\lambda}{b}}$$

$$= b \cdot \sum_{\varkappa=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha}{a}\varkappa} P(w + \omega_{\varkappa,0})$$

und weiter

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{\beta=0}^{b-1} \varphi_{\alpha\beta}(w) = b \cdot \sum_{\varkappa=0}^{a-1} P(w + \omega_{\varkappa,0}) \cdot \sum_{\alpha=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha\varkappa}{a}} = a \cdot b\, P(w).$$

Auch über das Produkt von Funktionen $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ lassen sich einige einfache Beziehungen ableiten, doch brauchen wir dazu die Darstellung dieser Funktionen durch $\vartheta$-Quotienten, die wir im folgenden Paragraphen ausführen werden.

## 6. Der Ausnahmefall $\varrho = 1$, $\sigma = 1$.

Ist speziell $\varrho = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}} = 1$, so muß $\alpha = 0$ sein. Dann folgt $\sigma = e^{2\pi i \frac{\beta}{b}}$. Soll auch $\sigma = 1$ sein, so ergibt sich $\beta = 0$. Wir haben also zu betrachten die Funktion:

$$\varphi_{00}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa,\lambda})$$

$$= P(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}). \tag{10}$$

[NB. Der Strich zwischen den Summenzeichen bedeutet, wie immer im folgenden, daß bei der Summation nicht zugleich $\varkappa = 0$ und $\lambda = 0$ werden darf.]

Ganz leicht zeigt man andrerseits, daß

$$p(w) = P(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Big( P(w + \omega_{\varkappa\lambda}) - P(\omega_{\varkappa\lambda}) \Big) \tag{11}$$

ist. Eine einfache Überlegung zeigt, daß $p(w)$ und

$$P(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

in $\Pi_\Omega$ genau dieselben Unstetigkeitspunkte haben.

Da beide Funktionen mit den $\Omega$-Perioden doppelt periodisch sind, so unterscheiden sie sich nach Satz IV nur um eine Konstante

$$p(w) = P(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + \text{const.}$$

Im Punkte $w = 0$ gelten die Reihenentwicklungen

$$p(w) = \frac{1}{w^2} + \text{aufsteigende Potenzen}$$

$$P(w) = \frac{1}{w^2} + \text{aufsteigende Potenzen}$$

Setze ich daher an

$$p(w) - \frac{1}{w^2} = P(w) - \frac{1}{w^2} + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

$$+ \text{const} + \text{aufst. Pot.},$$

so erhalte ich für $w = 0$

$$0 = 0 + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(\omega_{\varkappa\lambda}) + \text{const},$$

d. h.

$$\text{const} = -\sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(\omega_{\varkappa\lambda}) = -\gamma,$$

woraus sich sofort die Gleichung (11) ergibt. Vergleichen wir (11) mit (10), so folgt

$$\varphi_{00}(w) = p(w) + \gamma = p(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(\omega_{\varkappa\lambda}).$$

Damit ist der Ausnahmefall $\varphi_{00}(w)$ auf die bekannte p-Funktion zurückgeführt.

## § 3.

## Darstellungen durch Thetaquotienten.

### 1. Die doppelt periodischen Funktionen zweiter Art: $f_{\alpha\beta}(w)$.

In § 2 war die Funktion

$$(1) \quad \varphi_{\alpha\beta}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa} \sigma^{-\lambda} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

$$= P(w) + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa} \sigma^{-\lambda} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

eingeführt, wobei

$$\varrho = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}} \qquad \sigma = e^{2\pi i \frac{\alpha\beta - c\alpha}{ab}} \tag{1a}$$
$$\alpha = 0, 1, \cdots, a-1 ,$$
$$\beta = 0, 1, \cdots, b-1 ,$$

war. In der Umgebung des Punktes $w = 0$ gilt die Entwicklung

$$P(w) = \frac{1}{w^2} + c\,w^2 + \cdots .$$

Da $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ im Punkte $w = 0$ genau dieselben Unstetigkeiten besitzt, wie $P(w)$, so gilt eine Entwicklung von der Form

$$\text{in } w = 0\text{: } \varphi_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta}\,w + \cdots . \tag{1b}$$

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe mit Hilfe von $\vartheta$-Quotienten eine Funktion zu bauen, die bei Vermehrung des Arguments um die Perioden $\varrho$ bezw. $\sigma$ als Faktoren abscheidet. Wir erinnern dazu an folgendes:

Es ist nach Einleitung Formel (2)

$$\vartheta(w + \omega_1) = -\vartheta(w) ; \quad \vartheta(w + \omega_2) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(\omega_1 + \omega_2 + 2w)}\,\vartheta(w) ,$$

also hat man bei beliebigem $\Omega$

$$\vartheta(w - \Omega + \omega_1) = -\vartheta(w - \Omega)$$
$$\vartheta(w - \Omega + \omega_2) = e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}\left[\left(\omega_1 + \omega_2 + 2(w - \Omega)\right)\right]}\,\vartheta(w - \Omega) .$$

Wir bilden die Funktion

$$f(w) = C \cdot e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\mu \cdot w} \cdot \frac{\vartheta(w - \Omega)}{\vartheta(w)} \tag{2}$$

und verlangen, daß

$$f(w + \omega_1) = \varrho \cdot f(w) ,$$
$$f(w + \omega_2) = \sigma \cdot f(w) , \tag{3}$$

wird. Wenn wir diese Bedingungen ausführen, so folgt

$$f(w + \omega_1) = C \cdot e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\mu w + 2\pi i \mu} \frac{\vartheta(w - \Omega)}{\vartheta(w)} = e^{2\pi i \mu} f(w) .$$

Es muß also

$$e^{2\pi i \mu} = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}}, \text{ d. h } \mu = \frac{\alpha}{a} \tag{4 a}$$

sein. Ferner ergibt sich ebenso

$$f(w + \omega_2) = C \cdot e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} w} \frac{\vartheta(w - \Omega)}{\vartheta(w)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}\omega_2 + \frac{2\pi i}{\omega_1}\Omega}$$

$$= f(w) \cdot e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{a}\omega_2 + \Omega\right)}.$$

Damit auch der zweiten Bedingung (3) genügt wird, setzen wir an

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(\frac{\alpha}{a}\omega_2 + \Omega\right)} = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a\beta - c\alpha}{ab}\omega_1}.$$

Daraus folgt für $\Omega$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{\alpha}{a}\omega_2 + \Omega = \frac{a\beta - c\alpha}{ab}\omega_1,$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$\Omega = \frac{\beta\Omega_1 - \alpha\Omega_2}{ab} = \Omega_{\alpha\beta} \tag{4 b}$$

ergibt. Um die Abhängigkeit dieser Größe von $\alpha$ und $\beta$ anzudeuten, wurde der Doppelindex $\alpha\beta$ angehängt. Jetzt ist in (2) nur C noch unbestimmt. Um der später aufzustellenden Reihenentwicklung von f(w) eine einfache Form zu geben, verlangen wir, daß

$$\lim_{w=0} w \cdot f(w) = -1$$

wird. Daraus folgt dann durch Einführung dieser Bedingung in (2)

$$\lim_{w=0} w \cdot f(w) = \frac{C \cdot \vartheta(-\Omega_{\alpha\beta})}{\lim\limits_{w=0} \frac{\vartheta(w)}{w}} = -1.$$

Da $\lim\limits_{w=0} \frac{\vartheta(w)}{w} = \vartheta'(0)$ und $\vartheta(-\Omega_{\alpha\beta}) = -\vartheta(\Omega_{\alpha\beta})$ (Einleitung (3)

und (4)) ist, so ergibt sich hieraus

$$C = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\Omega_{\alpha\beta})} . \tag{4c}$$

Damit dieser Ausdruck zulässig sei, darf der Nenner nicht verschwinden. Gehört aber $\Omega_{\alpha\beta}$ dem Nullgitter von $\vartheta(w)$ an, so hat es die Form

$$\Omega_{\alpha\beta} = h\,\omega_1 + k\,\omega_2 ,$$

bei ganzzahligen Koeffizienten h und k. Dann ist aber

$$\begin{aligned} a\beta - \alpha c &= a\,b\,h , \\ -\alpha b &= a\,b\,k , \end{aligned} \quad \text{nach (4b)} .$$

Also ist: $\alpha = a \cdot k$, wo $\alpha = 0, 1, \cdots, a-1$ sein kann. Daraus folgt: $k = 0$, also $\alpha = 0$. Ferner ist dann: $\beta = b \cdot h$, wo $\beta = 0, 1, \cdots, b-1$ ist. Also ist: $h = 0$ und $\beta = 0$.

Bei der Definition von $f(w)$ ist also der Fall $\alpha = \beta = 0$ auszuschließen.

Setzen wir aus (4a), (4b), (4c) die Werte für $\mu$, $\Omega$, C in (2) ein und bezeichnen $f(w)$ von jetzt an mit $f_{\alpha\beta}(w)$, um die Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$ anzudeuten, so haben wir das Resultat:

Die Funktion

$$f_{\alpha\beta}(w) = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}w} \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\Omega_{\alpha\beta})} \frac{\vartheta(w - \Omega_{\alpha\beta})}{\vartheta(w)} , \tag{2a}$$

wo

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{\beta\,\Omega_1 - \alpha\,\Omega_2}{a\,b}$$

ist, hat die verlangten Periodeneigenschaften

$$f_{\alpha\beta}(w + \omega_1) = \varrho\, f_{\alpha\beta}(w) ; \; f_{\alpha\beta}(w + \omega_2) = \sigma\, f_{\alpha\beta}(w)$$

$$\alpha = 0, 1, \cdots, a-1 ; \; \beta = 0, 1, \cdots, b-1 \tag{3}$$

$$\alpha, \beta \neq 0, 0 .$$

## 2. Zusammenhang zwischen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $\varphi_{\alpha\beta}(w)$.

Zwischen den Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $\varphi_{\alpha\beta}(w)$, die wir auf so völlig verschiedenen Wegen erhalten haben, besteht ein sehr einfacher Zusammenhang. Ich behaupte, daß

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \frac{d\, f_{\alpha\beta}(w)}{d\, w} = f'_{\alpha\beta}(w) \tag{5}$$

ist. Die beiden Funktionen verhalten sich den Perioden $\omega_1, \omega_2$ gegenüber völlig gleich

$$\varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_1) = \varrho\,\varphi_{\alpha\beta}(w)\,;\quad \varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_2) = \sigma\,\varphi_{\alpha\beta}(w)$$

$$f_{\alpha\beta}(w+\omega_1) = \varrho\, f_{\alpha\beta}(w)\,;\quad f_{\alpha\beta}(w+\omega_2) = \sigma\, f_{\alpha\beta}(w)\,.$$

Nach der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Gleichung (2) ist

$$\text{in } w=0\text{:}\quad \varphi_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta}\,w + \cdots\,.$$

Nach der Forderung: $\lim\limits_{w=0} w\,f(w) = -1$, die wir eingeführt hatten, um C zu bestimmen, ergibt sich, daß die Reihenentwicklung von $f_{\alpha\beta}(w)$ in $w=0$ die Form hat

$$f_{\alpha\beta}(w) = -\frac{1}{w} + l_{\alpha\beta} + l'_{\alpha\beta}\,w + \cdots\,.$$

Differenzieren wir nach w, so folgt

$$f'_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + l'_{\alpha\beta} + \cdots\,.$$

Bilden wir die Differenz

$$\Delta(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w) - f'_{\alpha\beta}(w)\,,$$

so hat diese Funktion in $\Pi_\omega$ keine Unstetigkeitspunkte. Das gleiche gilt dann auch von ihrer n ten Potenz

$$\big(\Delta(w)\big)^n = \big(\varphi_{\alpha\beta}(w) - f'_{\alpha\beta}(w)\big)^n.$$

Diese ist außerdem doppelt periodisch mit den Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$, also ist

$$\big(\Delta(w)\big)^n = \text{const}\,.\quad \text{(Satz IV).}$$

Ziehen wir die n te Wurzel, so folgt

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) - f'_{\alpha\beta}(w) = \sqrt[n]{\text{const}} = c\,.$$

Diese Konstante c bestimmen wir mit Hilfe der Periodeneigenschaften unserer Funktionen. Es ist

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = f'_{\alpha\beta}(w) + c$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_1) = \varrho\,\varphi_{\alpha\beta}(w) = \varrho\,(f'_{\alpha\beta}(w) + c)\,.$$

Andererseits ist

$$\varphi_{\alpha\beta}(w+\omega_1) = f'_{\alpha\beta}(w+\omega_1) + c = \varrho\, f'_{\alpha\beta}(w) + c\,.$$

Damit beide Ausdrücke übereinstimmen, muß

$$\varrho\, c = c$$

sein. Ebenso folgt aus dem Verhalten der Funktionen gegenüber $\omega_2$, daß

$$\sigma\, c = c$$

sein muß. Da $\varrho$ und $\sigma$ nicht beide gleich 1 sein können, außer in dem erledigten Ausnahmefall: $\alpha = \beta = 0$, so muß $c = 0$ sein. Es ist also tatsächlich

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = f'_{\alpha\beta}(w)\,. \tag{5}$$

Damit ist der Anschluß der bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen an die Ausführungen des § 2 hergestellt. Die hier eingeführten Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ bilden, wie sich noch zeigen wird, die direkte Verallgemeinerung der Funktionen $f_i(w)$ der Einleitung.

### 3. Eine weitere Beziehung zwischen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $\varphi_{\alpha\beta}(w)$.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Beziehung zwischen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ derart abzuleiten, daß $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ gleich $f_{\alpha\beta}(w)$ multipliziert mit einer noch zu bestimmenden Funktion von w wird. Die hierbei sich ergebenden Ausdrücke gewähren einen tieferen Einblick in die Eigenschaften unserer Funktionen und werden sich zugleich für die Reihenentwicklung dieser Funktionen wichtig erweisen.

Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich in Anlehnung an die Formel $f'_{\alpha\beta}(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w)$ sehr einfach. Wir greifen zurück auf die Gleichung

$$f_{\alpha\beta}(w) = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}w}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\Omega_{\alpha\beta})}\,\frac{\vartheta(w-\Omega_{\alpha\beta})}{\vartheta(w)}. \tag{2a}$$

Nehme ich rechts und links den natürlichen Logarithmus, so ergibt sich durch Differentiation nach w

$$\frac{d\ln f_{\alpha\beta}(w)}{dw} = \frac{f'_{\alpha\beta}(w)}{f_{\alpha\beta}(w)} = \frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} + \lambda(w-\Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w)\,,$$

wenn $\lambda(w)$ die in der Einleitung erwähnte logarithmische Derivierte der $\vartheta$-Funktion ist. Daraus ergibt sich die gewünschte Beziehung

$$(6)\quad f'_{\alpha\beta}(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w) = f_{\alpha\beta}(w)\left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} + \lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w)\right].$$

Um den Faktor von $f_{\alpha\beta}(w)$ passend umzuformen, benutzen wir das Additionstheorem der $\lambda$-Funktion, das wir kurz ableiten wollen.

Nach Einleitung (10) ist

$$p(w) - p(v) = \left(\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(v)}\right)^2 \frac{\vartheta(v+w)\,\vartheta(v-w)}{\vartheta(w)^2}.$$

Wir ersetzen hierin w durch $w + x$ und v durch $v + x$, nehmen auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus und differenzieren nach x

$$\frac{d\ln(p(w+x) - p(v+x))}{dw}$$

$$= 2\lambda(w+v+2x) - 2\lambda(w+x) - 2\lambda(v+x) = \frac{p'(w+x) - p'(v+x)}{p(w+x) - p(v+x)}.$$

Für $x = 0$ ergibt sich

$$\frac{p'(w) - p'(v)}{p(w) - p(v)} = 2\lambda(w+v) - 2\lambda(w) - 2\lambda(v)$$

und wir haben das gesuchte Additionstheorem der $\lambda$-Funktion

$$(7)\qquad \lambda(w+v) - \lambda(w) - \lambda(v) = \frac{1}{2}\frac{p'(w) - p'(v)}{p(w) - p(v)}.$$

Setzen wir $v = -\Omega_{\alpha\beta}$, so wird

$$\lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w) + \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\frac{p'(w) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})}.$$

Wir führen das in den Klammerausdruck von (6) ein und erhalten

$$f'_{\alpha\beta}(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w) = f_{\alpha\beta}(w) \cdot H_{\alpha\beta}(w),$$

wo

$$(6a)\qquad H_{\alpha\beta}(w) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} - \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\frac{p'(w) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})}.$$

## 4. Direkte Darstellung der Funktion $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ durch Thetaquotienten.

Um den Anschluß an die Ausführungen des § 2 ganz lückenlos durchzuführen, bleibt uns nur noch übrig, einen direkten Ansatz von $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ in Form von Thetaquotienten zu versuchen. Es wird uns dadurch ermöglicht werden, die Funktion $H_{\alpha\beta}(w)$ der Formel (6a) genau auf ihre Nullstellen und Pole zu untersuchen.

Wir erinnern uns an den Umstand, daß $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ in $w = 0$ ein zweifaches Unendlichkeitsgitter hat. Wir setzen daher eine Funktion $\chi(w)$ von derselben Eigenschaft aus Thetafunktionen zusammen, und zwar gleich so, daß $\chi(w + \omega_1) = \varrho\,\chi(w)$ wird

$$\chi(w) = C\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}w}\,\frac{\vartheta(w - A)\cdot\vartheta(w - B)}{\vartheta(w)^2}. \tag{8}$$

Um auch zu erreichen, daß

$$\chi(w + \omega_2) = \sigma\,\chi(w)$$

wird, bilden wir

$$\frac{\chi(w + \omega_2)}{\chi(w)} = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\omega_2\frac{\alpha}{a}}\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(A + B)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung soll $= \sigma$ werden, daraus folgt

$$\frac{2\pi i}{\omega_1}\omega_2\frac{\alpha}{a} + \frac{2\pi i}{\omega_1}(A + B) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\omega_1\frac{a\beta - c\alpha}{a\,b}.$$

Wir erhalten für $A + B$ die Bedingung

$$A + B = \frac{\beta\,a\,\omega_1 - \alpha(c\,\omega_1 + b\,\omega_2)}{a\,b} = \Omega_{\alpha\beta} \text{ (nach (4b))}. \tag{9a}$$

Wir haben das vorläufige Resultat

Schreiben wir für die Summe der Nullpunkte A und B der durch (8) definierten Funktion $\chi(w)$ die Bedingung

$$A + B = \Omega_{\alpha\beta} \tag{9a}$$

vor, so hat $\chi(w)$ die Periodeneigenschaft

$$\chi(w + \omega_1) = \varrho\,\chi(w);\ \chi(w + \omega_2) = \sigma\,\chi(w).$$

Zur Bestimmung der Konstante C in (8) und zur Ableitung einer weiteren Relation zwischen den Größen A und B dient uns die Reihenentwicklung im Punkte $w = 0$. Dort hat $\chi(w)$, wie (8) zeigt, ein zweifaches Unendlichkeitsgitter, also eine Reihenentwicklung von der Form

$$\chi(w) = \frac{R_{-2}}{w^2} + \frac{R_{-1}}{w} + R + R_1 w + \cdots .$$

Vergleichen wir damit die Reihenentwicklung (1 b) von $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ in $w = 0$

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta} w + \cdots ,$$

so müssen wir, um Übereinstimmung von $\chi(w)$ und $\varphi(w)$ in den ersten Gliedern zu erzielen,

$$R_{-2} = 1 \quad R_{-1} = 0$$

setzen. Offenbar ist

$$\lim_{w=0} w^2 \chi(w) = R_{-2},$$

also

$$\lim_{w=0} w^2 \chi(w) = \frac{C \cdot \vartheta(A)\,\vartheta(B)}{\left(\lim\limits_{w=0} \dfrac{\vartheta(w)}{w}\right)^2} = \frac{C\,\vartheta(A) \cdot \vartheta(B)}{\vartheta'(0)^2} = 1$$

nach (4) der Einleitung.

Daraus folgt

(9 b) $$C = \frac{\vartheta'(0)^2}{\vartheta(A) \cdot \vartheta(B)} .$$

Um die Bedingung $R_{-1} = 0$ auswerten zu können, müssen wir die Thetafunktionen in Reihen entwickeln und alle diese Reihenentwicklungen multiplizieren. Zunächst liefert uns der Taylorsche Lehrsatz die Entwicklung

$$\vartheta(A - w) = \vartheta(A) - w\,\vartheta'(A) + \frac{w^2}{2}\vartheta''(A) - \cdots$$

$$= \vartheta(A)\left[1 - w\,\lambda(A) + \frac{w^2}{2}\frac{\vartheta''(A)}{\vartheta(A)} - \cdots\right],$$

und ebenso

$$\vartheta(B - w) = \vartheta(B)\left[1 - w\,\lambda(B) + \frac{w^2}{2}\frac{\vartheta''(B)}{\vartheta(B)} - \cdots\right].$$

Ebenfalls nach dem Taylorschen Satz erhalten wir, weil $\vartheta(w)$ eine ungerade Funktion ist

$$\vartheta(w) = w \cdot \vartheta'(0)[1 + c_2'' w^2 + \cdots].$$

Also folgt

$$\frac{1}{(\vartheta(w))^2} = \frac{1}{w^2 \vartheta'(0)^2} \cdot [1 + c_2''' w^2 + c_3''' w^4 + \cdots],$$

wie wir diese Entwicklung umformen können.

Endlich ist noch

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} w} = 1 + \frac{2\pi i \alpha}{\omega_1 a} w + \cdots.$$

Wir setzen alle diese Reihenentwicklungen und den Wert für C aus (9 b) in die Gleichung (8) ein und erhalten

$$\chi(w) = \frac{\vartheta'(0)^2}{\vartheta(A)\cdot\vartheta(B)} \frac{\vartheta(A-w)\cdot\vartheta(B-w)}{\vartheta(w)^2} e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} w}$$

$$= \frac{\vartheta'(0)^2}{\vartheta(A)\vartheta(B)} \frac{\vartheta(A)\vartheta(B)}{\vartheta'(0)^2} \cdot \frac{1}{w^2}[1 - w\lambda(A) + \cdots][1 - w\lambda(B) + \cdots]$$

$$\cdot [1 + c_2''' w^2 + \cdots] \cdot \left[1 + \frac{2\pi i \alpha}{\omega_1 a} w + \cdots\right].$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$R_{-1} = \frac{2\pi i \alpha}{\omega_1 a} - \lambda(A) - \lambda(B) = 0,$$

also

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \frac{2\pi i \alpha}{\omega_1 a}. \tag{9 c}$$

Wir haben somit das Resultat:

Schreiben wir der durch (8) definierten Funktion $\chi(w)$, die wir übrigens, um die Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$ anzudeuten, mit $\chi_{\alpha\beta}(w)$ bezeichnen wollen, die Bedingungen vor

$$C = \frac{\vartheta'(0)^2}{\vartheta(A)\cdot\vartheta(B)},$$

$$A + B = \Omega_{\alpha\beta}, \tag{9}$$

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \frac{2\pi i\,\alpha}{\omega_1\,a},$$

so ist

$$\chi_{\alpha\beta}(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w).$$

Die letztere Behauptung wäre noch zu beweisen. Wie eben gezeigt wurde, gilt unter den eben gegebenen Bedingungen in $w = 0$ die Entwicklung

$$\chi_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + R_0 + R_1 w + \cdots.$$

Ferner ist nach Gleichung (1 b)

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta} w + \cdots,$$

also ist

$$\Delta(w) = \varphi_{\alpha\beta}(w) - \chi_{\alpha\beta}(w)$$

eine Funktion, die in $\Pi_\omega$ keine Unstetigkeiten hat. Da für ihre $n$te Potenz, die eine doppelt periodische Funktion ist, dasselbe gilt, so ist

$$\overset{n}{\Delta}(w) = \text{const.}, \text{ also } \Delta(w) = c \qquad \text{(Satz IV)},$$

woraus

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \chi_{\alpha\beta}(w) + c$$

folgt. Auf ganz dieselbe Weise wie unter 2 ergibt sich, daß $c = 0$ sein muß, daß also

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = \chi_{\alpha\beta}(w)$$

ist.

Diese Darstellung von $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ durch $\vartheta$-Quotienten interessiert uns nicht weiter. Wichtig für das Folgende sind nur die beiden letzten Bedingungen (9).

## 5. Bestimmung der Nullstellen und Pole der Funktion

$$H_{\alpha\beta}(w) = \frac{2\pi i\,\alpha}{\omega_1\,a} - \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\frac{p'(w) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})}.$$

Die Bedingungen (9) verlangen, A und B aus den beiden Formeln

$$A + B = \Omega_{\alpha\beta},$$

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a}$$

zu bestimmen. Da diese Gleichungen in A und B symmetrisch sind, so genügt es, eine der Unbekannten, etwa A, zu berechnen. Zu dem Zwecke setzt man einfach

$$B = \Omega_{\alpha\beta} - A$$

in die zweite Formel ein und erhält

$$\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} = \lambda(A) + \lambda(\Omega_{\alpha\beta} - A) = \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\frac{p'(A) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(A) - p(\Omega_{\alpha\beta})},$$

wie aus dem Additionstheorem der $\lambda$-Funktion (Formel (7)) folgt. Es muß also A der Bedingung

$$\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} - \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\frac{p'(A) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(A) - p(\Omega_{\alpha\beta})} \doteq 0$$

genügen. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gerade die in (6a) definierte Funktion $H_{\alpha\beta}(w)$ für $w = A$, und wir sehen:

Es muß A eine Nullstelle von $H_{\alpha\beta}(w) = 0$ sein.

Damit ist zugleich die Funktion $H_{\alpha\beta}(w)$ in (6a) anschaulich gedeutet. Da, wie schon erwähnt, unsere Bedingungen für A und B symmetrisch sind, so muß auch B eine Nullstelle von $H_{\alpha\beta}(w) = 0$ sein. Multiplizieren wir in dem Ausdruck:

$$H_{\alpha\beta}(w) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} - \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\frac{p'(w) + p'(\Omega_{\alpha\beta})}{p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})}$$

mit $p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})$ herauf und bilden die Funktion

$$F(w) = \left(\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} - \lambda(\Omega_{\alpha\beta})\right)\left(p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta})\right) + \frac{1}{2}\left(p'(w) + p'(\Omega_{\alpha\beta})\right),$$

so hat $F(w)$ ebenfalls die Nullgitter $w = A$ und $w = B$. Man sieht aber sofort, daß in $w = 0$ die Entwicklung gilt

$$F(w) = -\frac{1}{w^3} + \frac{\text{const.}}{w^2} + \cdots.$$

$F(w)$ ist doppelt periodisch, hat also nach dem Abelschen Theorem

3 Nullgitter, deren Summe $\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$ sein muß. Sei C das dritte Nullgitter, so muß

$$A + B + C \equiv 0 \mod \omega_1, \omega_2 \quad \text{(Satz II)}$$

sein, und da $A + B \equiv \Omega_{\alpha\beta}$ ist, so muß

$$C \equiv -\Omega_{\alpha\beta}$$

das dritte Nullgitter sein. Damit ist die Untersuchung der Nullstellen und Pole dieser Funktion für unsere Zwecke genügend fertiggestellt.

Wir haben in diesem Paragraphen die Darstellung unserer Funktionen durch $\vartheta$-Quotienten vollständig auf alle mögliche Weise durchgeführt. Die hierbei erlangten Resultate sollen uns dazu dienen, die Reihenentwicklungen der Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $\varphi_{\alpha\beta}(w)$ wirklich aufzustellen.

Das soll die Aufgabe des folgenden Paragraphen sein.

## § 4.

## Reihenentwicklung der Funktion $f_{\alpha\beta}(w)$.

Für die weitere Untersuchung und Behandlung unserer Funktionen ist es nötig, die Entwicklung in eine Potenzreihe nach wachsenden Potenzen von w wirklich durchzuführen. Für die ersten Koeffizienten dieser Reihe ergeben sich noch sehr einfache und übersichtliche Ausdrücke, während für die Koeffizienten höherer Potenzen recht umständliche Werte herauskommen. Wir werden daher auch nur die ersten Koeffizienten wirklich berechnen. Wir werden dann erkennen, daß die nächsten Koeffizienten prinzipiell ebenso einfach zu berechnen sind; nur die wirkliche Ausrechnung ist mühsam und zeitraubend. Für die Behandlung der Beispiele werden die ersten Koeffizienten völlig ausreichen.

### 1. Erster Ansatz für die Reihenentwicklung.

Am einfachsten ergibt sich die Reihenentwicklung aus der Formel (6) des § 3

$$(1) \qquad f'_{\alpha\beta}(w) = f_{\alpha\beta}(w)\left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} + \lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w)\right].$$

Wir hatten in § 3, 2 gezeigt, daß in $w = 0$, $f_{\alpha\beta}(w)$ die Entwicklung

$$f_{\alpha\beta}(w) = -\frac{1}{w} + A_1 + A_2 w + A_3 w^2 + \cdots \tag{2a}$$

hat. Dann folgt

$$f'_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + A_2 + 2A_3 w + \cdots. \tag{2b}$$

Es bleibt also nur übrig, den Klammerausdruck von (1) in eine Reihe zu entwickeln, die so erhaltenen Reihen in Gleichung (1) einzusetzen und durch Koeffizientenvergleichung die Unbekannten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zu ermitteln. Dazu brauchen wir zunächst die Reihenentwicklung der $\lambda$-Funktion.

## 2. Aufstellung der Reihe für $\lambda(w)$.

Nach den Bemerkungen in der Einleitung gilt für $\lambda(w)$ im Punkte $w = 0$ eine Entwicklung von der Form:

$$\lambda(w) = \frac{1}{w} + c w + c_1 w^3 + c_2 w^5 + c_3 w^7 \cdots, \quad \text{nach Einl. (7)}$$

also ist

$$\lambda'(w) = -\frac{1}{w^2} + c + 3 c_1 w^2 + 5 c_2 w^4 + 7 c_3 w^6 + \cdots.$$

Nach Definition ist

$$\lambda'(w) = c - p(w) \qquad \text{nach Einl. (8).}$$

In der „Formelsammlung zum Gebrauch der elliptischen Funktionen“ von Schwarz-Weierstraß finden wir für $p(w)$ die Reihe

$$p(w) = \frac{1}{w^2} + \frac{g_2}{20} w^2 + \frac{g_3}{28} w^4 + \frac{g_2^2}{1200} w^6 + \cdots,$$

also ist

$$\lambda'(w) = c - p(w) = -\frac{1}{w^2} + c - \frac{g_2}{20} w^2 - \frac{g_3}{28} w^4 - \frac{g_2}{1200} w^6 + \cdots.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenten von w in den beiden Ausdrücken für $\lambda'(w)$ liefert dann die Formeln

$$3\,c_1 = -\frac{g_2}{20} \qquad c_1 = -\frac{g_2}{60}$$

$$5\,c_2 = -\frac{g_3}{28} \qquad c_2 = -\frac{g_3}{140}$$

$$7\,c_3 = -\frac{g_2^{\,2}}{1200} \qquad c_3 = -\frac{g_2^{\,2}}{8400}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Setzen wir diese Werte der Koeffizienten in die Reihe für $\lambda(w)$ ein, so ergibt sich die gesuchte Entwicklung

$$(3) \qquad \lambda(w) = \frac{1}{w} + c\,w - \frac{g_2}{60}w^3 - \frac{g_3}{140}w^5 - \frac{g_2^{\,2}}{8400}w^7 - \cdots.$$

### 3. Die Reihenentwicklung des Ausdrucks:

$$H_{\alpha\beta}(w) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{a}{a} + \lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w).$$

Die Entwicklung von $\lambda(w - \Omega_{\alpha\beta})$ finden wir nach dem Taylorschen Satz. Es ist

$$-\lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) = \lambda(\Omega_{\alpha\beta} - w) = \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) - w\,\lambda'(\Omega_{\alpha\beta})$$
$$+ \frac{w^2}{2}\lambda''(\Omega_{\alpha\beta}) - \frac{w^3}{3!}\lambda'''(\Omega_{\alpha\beta}) + \frac{w^4}{4!}\lambda''''(\Omega_{\alpha\beta}) + \cdots.$$

Es ist aber

$$\lambda'(\Omega_{\alpha\beta}) = c - p(\Omega_{\alpha\beta}) = c - \eta_{\alpha\beta} = c - \eta,$$

wie wir abkürzend schreiben wollen. Daraus folgt

$$\lambda''(\Omega_{\alpha\beta}) = -\eta'$$
$$\lambda'''(\Omega_{\alpha\beta}) = -\eta''$$
$$\lambda''''(\Omega_{\alpha\beta}) = -\eta''' \quad \text{usw.}$$

Setzen wir diese Werte ein, so finden wir

$$(4) \qquad -\lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) = \lambda(\Omega_{\alpha\beta}) - c\,w + w\,\eta - \frac{w^2}{2}\eta' + \frac{w^3}{3!}\eta''$$
$$- \frac{w^4}{4!}\eta''' + \cdots.$$

Addieren wir (3) und (4) und multiplizieren mit $-1$, so erhalten wir

$$(5)\qquad \lambda(w-\Omega_{\alpha\beta})-\lambda(w)=-\frac{1}{w}-\lambda(\Omega_{\alpha\beta})-w\cdot\eta+\frac{w^2}{2!}\eta'$$
$$-\frac{w^3}{3!}\eta''+\frac{w^3}{60}g_2+\frac{w^4}{4!}\eta'''+\cdots.$$

Nach den bekannten Sätzen und Formeln über die p-Funktion gilt aber

$$\eta'^2=4\eta^3-g_2\eta-g_3 \qquad \text{nach Einl. (11).}$$
$$\eta''=12\eta^2-g_2$$
$$\eta'''=12\eta\eta' \text{ usw.}$$

Wir setzen diese Werte für $\eta'', \eta''', \ldots$ in (5) ein, addieren auf beiden Seiten $\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}$ und erhalten die gesuchte Entwicklung:

$$H_{\alpha\beta}(w)=-\frac{1}{w}+\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}-\lambda(\Omega_{\alpha\beta})-w\cdot\eta+\frac{w^2}{2}\eta'+w^3\left(\frac{g_2}{10}-\eta^2\right)$$
$$(6)\qquad +\frac{w^4}{2}\eta\eta'+\cdots$$
$$=-\frac{1}{w}+\zeta-w\cdot\eta+\frac{w^2}{2}\eta'+w^3\left(\frac{g_2}{10}-\eta^2\right)+\frac{w^4}{2}\eta\eta'+\cdots,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}-\lambda(\Omega_{\alpha\beta})=\zeta_{\alpha\beta}=\zeta$$

setzen.

## 4. Berechnung der Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Setzen wir jetzt die Reihen (2) und (6) in (1) ein, so bekommen wir zur Bestimmung der Koeffizienten die Beziehung:

$$\frac{1}{w^2}+A_2+2A_3w+3A_4w^2+\cdots$$
$$=\left[-\frac{1}{w}+A_1+A_2w+A_3w^2+A_4w^3+\cdots\right]$$
$$\cdot\left[-\frac{1}{w}+\zeta-\eta w+\frac{w^2}{2}\eta'+w^3\left(\frac{g_2}{10}-\eta^2\right)+\frac{w^4}{2}\eta\eta'+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{w^2} - \frac{A_1 + \zeta}{w} - A_2 + A_1\zeta + \eta - w\left(A_3 - A_2\zeta + \eta A_1 + \frac{1}{2}\eta'\right)$$
$$+ w^2\left(-A_4 + A_3\zeta - \eta A_2 + \frac{A_1}{2}\eta' + \eta^2 - \frac{g_2}{10}\right)$$
$$+ w^3\left(\cdots\right)$$
$$+ \cdots$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten folgt dann:

$$A_1 = -\zeta$$
$$A_2 = \frac{-\zeta^2 + \eta}{2}$$
$$A_3 = -\frac{\zeta^3}{3!} + \frac{1}{2}\zeta\eta - \frac{1}{6}\eta' \tag{7}$$
$$A_4 = -\frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^2\eta}{4} - \frac{1}{6}\eta'\zeta + \frac{\eta^2}{8} - \frac{g_2}{40}$$

usw.

Wir sehen, daß der Ausdruck für $A_4$ schon sehr weitläufig ist. Zugleich erkennen wir, daß es möglich ist, sukzessive beliebig viele weitere Koeffizienten zu berechnen.

Die Werte der $A_1, A_2, \ldots$ in (2) eingesetzt geben die gesuchten Reihenentwicklungen

$$f_{\alpha\beta}(w) = -\frac{1}{w} - \zeta + w\cdot\frac{-\zeta^2+\eta}{2} + w^2\left(-\frac{\zeta^3}{3!} + \frac{1}{2}\zeta\eta - \frac{1}{6}\eta'\right) + \cdots$$
$$f'_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} + \frac{-\zeta^2+\eta}{2} + w\left(-\frac{\zeta^3}{3} + \zeta\eta - \frac{1}{3}\eta'\right) + w^2(\cdots) + \cdots \tag{8}$$

$$\alpha = 0, 1, \cdots, a-1 \qquad \beta = 0, 1, \cdots, b-1$$
$$\alpha, \beta \neq 0, 0 \quad .$$

Damit ist die geforderte Reihenentwicklung geliefert. Die Koeffizienten können beliebig weit berechnet werden.

## 5. Anwendung.

Als erste Anwendung berechnen wir mit Hilfe der Entwicklung von $f'_{\alpha\beta}(w)$ die Konstante:

$$\gamma = \sum_{\varkappa=0}^{a-1}{}' \sum_{\lambda=0}^{b-1} P(\omega_{\varkappa\lambda}),$$

die in § 2, 6 bei Behandlung des Ausnahmefalls $\varphi_{00}(w)$ aufgetreten war. Es wird uns gelingen, dies $\gamma$, das durch die p-Funktion des $\Omega$-Gitters dargestellt war, durch Größen auszudrücken, die zum Gitter der $\omega$ gehören.

In § 2, 5 hatten wir die Beziehung

$$n \cdot P(w) = \sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{\beta=0}^{b-1} \varphi_{\alpha\beta}(w) = \varphi_{00}(w) + \sum_{\alpha=0}^{a-1,b-1} \sum_{\beta=0} \varphi_{\alpha\beta}(w)$$

abgeleitet. Ferner war in § 2, 6 gezeigt, daß

$$\varphi_{00}(w) = p(w) + \gamma$$

ist. Berücksichtigen wir noch, daß $\varphi_{\alpha\beta}(w) = f'_{\alpha\beta}(w)$ ist, so folgt

$$n \cdot P(w) = \gamma + p(w) + \sum_{\alpha=0}^{a-1,b-1} \sum_{\beta=0} f'_{\alpha\beta}(w). \tag{9}$$

Setzen wir in (9) auf beiden Seiten die Reihenentwicklungen an, so ergibt sich

$$\frac{n}{w^2} + w^2 \cdot a + \cdots = \gamma + \frac{1}{w^2} + \frac{g_2}{20} w^2 + \cdots + \frac{n-1}{w^2} + \sum_{\alpha=0}^{a-1,b-1} \sum_{\beta=0} A_2 + w \cdot a_1 + \cdots.$$

Durch Gleichsetzen der konstanten Glieder erhalten wir:

$$\gamma = -\sum_{\alpha=0}^{a-1,b-1} \sum_{\beta=0} A_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{a-1,b-1} \sum_{\beta=0} (\zeta^2_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}).$$

Das ist die gesuchte Darstellung.

## 6. Entwicklung der Funktion $f^n_{\alpha\beta}(w)$ in eine Potenzreihe.

Da wir die Entwicklung von $f_{\alpha\beta}(w)$ kennen, erhalten wir durch einfaches Potenzieren die Reihenentwicklung der doppelt periodischen Funktion $f^n_{\alpha\beta}(w)$. $f^n_{\alpha\beta}(w)$ hat in $w = 0$ einen Pol nter Ordnung. Die Reihe für $f_{\alpha\beta}(w)$ beginnt dort mit dem Gliede $\frac{1}{w}$; daher setzen wir sofort an

$$\text{in } w = 0\colon\ f^n_{\alpha\beta}(w) = \frac{(-1)^n}{w^n} + \frac{s_1}{w^{n-1}} + \frac{s_2}{w^{n-2}} + \cdots.$$

Für $f_{\alpha\beta}(w)$ gilt die Entwicklung

$$f_{\alpha\beta}(w) = -\frac{1}{w} + A_1 + A_2 w + A_3 w^2 + \cdots$$
$$= -\frac{1}{w} + \chi,$$

wie wir schreiben wollen. Dann ist nach dem binonischen Lehrsatz

$$f_{\alpha\beta}^{n}(w) = \left(-\frac{1}{w} + \chi\right)^n = \left(-\frac{1}{w}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{-1}{w}\right)^{n-1}\chi + \binom{n}{2}\left(\frac{-1}{w}\right)^{n-2}\chi^2 + \cdots$$
$$= \left(\frac{-1}{w}\right)^n + n\frac{(-1)^{n-1}}{w^{n-1}}A_1 + n\frac{(n-1)}{2}\frac{(-1)^{n-2}}{w^{n-2}}A_1^2 + n\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{w^{n-2}}A_2 + \cdots.$$

Vergleichen wir das mit dem ersten Ansatz und setzen für $A_1$, $A_2, \cdots$ ihre Werte nach den Formeln (7) ein, so folgt

$$s_1 = n(-1)^{n-1}A_1 = n(-1)^n \cdot \zeta$$

(11) $$s_2 = (-1)^{n-1} n\left(A_2 - \frac{n-1}{2}A_1^2\right) = (-1)^{n-1}\frac{n}{2}(\eta - \zeta^2 - (n-1)\zeta^2)$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{n}{2}(\eta - n\zeta^2) \text{ usw.},$$

also, wenn wir einsetzen

(12) $$f_{\alpha\beta}^{n}(w) = \frac{(-1)^n}{w^n} + (-1)^n\frac{n\zeta}{w^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{n}{2}\frac{\eta - n\zeta^2}{w^{n-2}} + \cdots.$$

Diese Entwicklung wird für uns bei den folgenden Darstellungen von $f_{\alpha\beta}^{n}(w)$ durch die p-Funktion von Wichtigkeit sein.

Wir wollen sie nur in den einfachsten Fällen $n = 2$ und $n = 3$ fertig ausarbeiten.

### 7. Die speziellen Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Im Falle $n = 2$ folgt aus dem Residuensatz

$$s_1 = 0, \text{ d. h. } \zeta_{\alpha\beta} = 0.$$

Dann wird

$$s_2 = -\eta_{\alpha\beta},$$

also

$$f^2{}_{\alpha\beta}(w) = \frac{1}{w^2} - \eta_{\alpha\beta} + \text{aufst. Pot.}$$

Nun ist

$$p(w) = \frac{1}{w^2} + \alpha w^2 + \cdots,$$

also ist die Differenz dieser Funktionen, da beide doppelt periodisch sind:

$$f^2{}_{\alpha\beta}(w) - p(w) = \text{const} \qquad \text{nach Satz IV.}$$

Durch Vergleichung folgt unmittelbar, daß

$$\text{const} = -\eta_{\alpha\beta} = -p(\Omega_{\alpha\beta})$$

ist. Wir haben also das Resultat:

$$f^2{}_{\alpha\beta}(w) = p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta}).$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ tatsächlich die direkten Verallgemeinerungen der Funktionen $f_i(w)$ sind, von denen wir in der Einleitung ausgegangen sind.

Da für $n = 2$ die Anzahl z aller wesentlich verschiedenen Transformationsmatrizen nach Formel (10) in § 1, 3 den Wert $z = 3$ hat, und da zu jeder Matrix hier nur eine Funktion $f_{\alpha\beta}(w)$ gehört, so bekommen wir auch hier drei verschiedene Funktionen, die mit den drei Funktionen $f_i(w)$, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen.

Wir führen noch den einfachen Fall $n = 3$ aus. Setzen wir in den Formeln (11) $n = 3$, so wird:

$$s_1 = -3\zeta$$

$$s_2 = \frac{3}{2}(\eta - 3\zeta^2) = 0 \text{ nach dem Residuensatz (Satz III).}$$

Daraus folgt:

$$\eta = 3\zeta^2.$$

Ferner findet man leicht:

$$s_3 = 3A_3 - 6A_1A_2 + A_1{}^3 = -\frac{1}{2}\eta' + 9\zeta^3 = 3\zeta\eta - \frac{1}{2}\eta',$$

also wenn wir einsetzen

$$f^2_{\alpha\beta}(w) = -\frac{1}{w^3} - \frac{3\zeta}{w^2} + 9\zeta^3 - \frac{1}{2}\eta' + \text{aufst. Pot.}$$
$$= \frac{1}{2}p'(w) - 3\zeta\, p(w) + 3\zeta\,\eta - \frac{1}{2}\eta'$$
$$= \frac{1}{2}p'(w) - 3\zeta\, p(w) + 9\zeta^3 - \frac{1}{2}\eta'.$$

## 8. Produkte der Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $f'_{\alpha\beta}(w)$.

Wir sind jetzt imstande, auch über Produkte aus unseren Funktionen einige Beziehungen abzuleiten. Es ist

$$f_{\alpha\beta}(w) = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a}w}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(w)}\,\frac{\vartheta(w-\Omega_{\alpha\beta})}{\vartheta(\Omega_{\alpha\beta})}\,.$$

Also ist

$$f_{\alpha\beta}(-w) = -e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{-\alpha}{a}w}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(w)}\,\frac{\vartheta(w-\Omega_{-\alpha,-\beta})}{\vartheta(\Omega_{-\alpha,-\beta})} \tag{13}$$
$$= -f_{-\alpha,-\beta}(w)\,.$$

Das Produkt dieser beiden Funktionen ist

$$f_{\alpha\beta}(w)\cdot f_{-\alpha,-\beta}(w) = -f_{\alpha\beta}(w)\,f_{\alpha\beta}(-w)\,.$$

Diese Funktion ist, wie aus dem Ausdruck links hervorgeht, doppelt periodisch, da die vortretenden Faktoren sich jedesmal aufheben. Und sie ist gerade, wie der Ausdruck rechts zeigt. Ich setze die Reihenentwicklungen an

$$-f_{\alpha\beta}(w)\cdot f_{\alpha\beta}(-w) = -\left[-\frac{1}{w} + A_1 + A_2 w + \cdots\right]\cdot\left[+\frac{1}{w} + A_1 - A_2 w + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{w^2} - (2A_2 + A_1^2) + \text{aufst. Pot.},$$

wie eine leichte Rechnung zeigt.

Aus den Formeln (7) folgt

$$2A_2 + A_1^2 = \eta_{\alpha\beta} - \zeta^2 + \zeta^2 = \eta_{\alpha\beta}\,.$$

Also ergibt sich, wie man auf die schon oft angeführte Weise zeigt, daß

$$f_{\alpha\beta}(w)\cdot f_{-\alpha,-\beta}(w) = p(w) - p(\Omega_{\alpha\beta}) \tag{14}$$

ist.

Ferner sehen wir unmittelbar ein, daß

$$\mathfrak{f}_{\alpha,\beta+b}(w) = \mathfrak{f}_{\alpha\beta}(w) \tag{15}$$

ist. Fassen wir also je zwei Funktionen aus der Reihe: $\mathfrak{f}_{01}(w)$, $\mathfrak{f}_{02}(w), \cdots, \mathfrak{f}_{0,b-1}(w)$ nach der in (14) angegebenen Weise zusammen, so folgt:

$$\prod_{\beta=1}^{b-1} \mathfrak{f}_{0\beta}(w) = \prod_{\beta=1}^{\frac{b-1}{2}} [\mathfrak{p}(w) - \mathfrak{p}(\Omega_{0\beta})] . \tag{16}$$

Das kann natürlich nur gelten, wenn b eine ungerade Zahl ist. Eine der Formel (16) analoge Formel finden wir bei: „Tannery et Molk, Fonctions elliptiques“ III. Band für die dort (S. 18 ff. und S. 102 ff.) aufgestellten Funktionen $A_{pq}(u)$ abgeleitet.

Wir können auch aus Funktionen $\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(w)$ ähnlich wie in (16) ein Produkt bilden.

Nach § 3, 3. Formel (6) ist

$$\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(w) = \mathfrak{f}_{\alpha\beta}(w) \left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} + \lambda(w - \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w)\right] .$$

Ersetzen wir w durch $-w$, so erhalten wir

$$\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(-w) = \mathfrak{f}_{\alpha\beta}(-w) \left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} - \lambda(w + \Omega_{\alpha\beta}) + \lambda(w)\right] . \tag{17 a}$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{f}'_{-\alpha,-\beta}(w) = \mathfrak{f}_{-\alpha,-\beta}(w) \left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{-\alpha}{a} + \lambda(w + \Omega_{\alpha\beta}) - \lambda(w)\right] ,$$

woraus nach (13) folgt

$$\mathfrak{f}'_{-\alpha,-\beta}(w) = \mathfrak{f}_{\alpha\beta}(-w) \left[\frac{2\pi i}{\omega_1}\frac{\alpha}{a} - \lambda(w + \Omega_{\alpha\beta}) + \lambda(w)\right] . \tag{17 b}$$

Aus (17 a) und (17 b) ergibt sich

$$\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(-w) = \mathfrak{f}'_{-\alpha,-\beta}(w) . \tag{18 a}$$

Wieder sieht man, daß

$$\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(w)\,\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(-w) = \mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(w)\cdot\mathfrak{f}'_{-\alpha,-\beta}(w)$$

eine doppelt periodische und gerade Funktion ist. Setzt man die Reihenentwicklungen an, so zeigt eine leichte Rechnung, die wir hier weglassen, daß

$$\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(w)\cdot\mathfrak{f}'_{\alpha\beta}(-w) = \frac{1}{6}\mathfrak{p}''(w) + (\eta - \zeta^2)\,\mathfrak{p}(w) - \frac{g_2}{60} + 3A_4 + A_2{}^2 \tag{19}$$

ist. Berücksichtigt man ferner, daß

$$f'_{\alpha,\beta+b}(w) = f'_{\alpha\beta}(w)$$

ist, so findet man ganz entsprechend

$$(20)\quad \prod_{\beta=1}^{b-1} f'_{0\beta}(w) = \prod_{\beta=1}^{\frac{b-1}{2}} \left[\frac{1}{6} p''(w) + (\eta_{0\beta} - \zeta_{0\beta}{}^2)\, p(w) - \frac{g_2}{20} + 3A_4 + A_2{}^2\right].$$

Natürlich ist auch in $A_2$ und $A_4$ überall $\alpha = 0$ zu setzen; und b muß eine ungerade Zahl sein.

§ 5.

## Darstellungen der doppelt periodischen Funktion $f^n_{\alpha\beta}(w)$ durch die Weierstraßsche p-Funktion.

Die vorigen Paragraphen waren hauptsächlich der Untersuchung und Darstellung der doppelt periodischen Funktion zweiter Art $f_{\alpha\beta}(w)$ gewidmet. Wir wollen uns im folgenden mit der nten Potenz dieser Funktion der doppelt periodischen Funktion $f^n_{\alpha\beta}(w)$ beschäftigen. Für diese gelten die einfachen Sätze über doppelt periodische Funktionen. Insbesondere werden wir den Satz anwenden, daß jede doppelt periodische Funktion durch die Weierstraßsche p-Funktion und deren Ableitungen darstellbar ist. Dabei wird uns die in § 4, 6 hergeleitete Reihenentwicklung von $f^n_{\alpha\beta}(w)$, die wir dort fast nebenbei erhielten, von großem Nutzen sein.

### 1. Erste Darstellung durch die p-Funktion und ihre Ableitungen.

Sehr einfach ergibt sich eine Darstellung in der gewünschten Form, wenn wir, wie wir es in ähnlicher Weise schon oft durchführten, die Reihenentwicklungen der in Betracht kommenden Funktionen ansetzen und vergleichen. In § 4, 6 hatten wir gefunden

$$f^n_{\alpha\beta}(w) = \frac{(-1)^n}{w^n} + \frac{s_1}{w^{n-1}} + \frac{s_2}{w^{n-2}} + \cdots .$$

Ferner wissen wir, es ist

$$p(w) = \frac{1}{w^2} + c_1 w + c_2 w^4 + \cdots$$

$$p'(w) = \frac{-2}{w^3} + c_1 + 4 c_2 w^3 + \cdots$$

$$p''(w) = (-1)^2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{w^4} + 12 c_2 w^2 + \cdots$$

$$p'''(w) = (-1)^3 \frac{4!}{w^5} + 24 c_2 w + \cdots$$

. . . . . .

$$p^{(\nu)}(w) = (-1)^\nu \frac{(\nu+1)!}{w^{\nu+2}} + \text{const.} + \text{aufst. Pot.},$$

wobei noch zu bemerken ist, daß für ungerades $\nu$ das konstante Glied verschwindet.

Durch Vergleichung der Reihenentwicklungen sehen wir unmittelbar, daß wir

(1) $$f^n_{\alpha\beta}(w) = c_0 p^{(n-2)}(w) + c_1 p^{(n-3)}(w) + \cdots + c_{n-2} p(w) + c_{n-1}$$

setzen können.

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ bestimmt man mit Hilfe der in § 4, 6 berechneten Werte für $s_1, s_2, \cdots$. Man erhält durch Koeffizientenvergleichung die folgenden Werte

$$(-1)^n = c_0 (-1)^{n-2} (n-1)! \quad \text{also:} \quad c_0 = \frac{1}{(n-1)!}$$

(2) $$s_1 = n \cdot (-1)^n \zeta = c_1 \cdot (-1)^{n-3} (n-2)! \qquad c_1 = (-1)^3 \frac{n \cdot \zeta}{(n-2)!}$$

$$s_2 = (-1)^{n-1} \frac{n}{2} (\eta - n\zeta^2) = c_2 (-1)^{n-4} (n-3)!$$

$$c_2 = (-1)^3 \frac{n}{2} \frac{\eta - n\zeta^2}{(n-3)!}$$

usw. .

Da man die Koeffizienten $s_1, s_2, \cdots$ nach dem in § 4, 6 angegebenen Schema beliebig weit berechnen kann, so kann man, wie leicht ersichtlich ist, die Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ sämtlich berechnen. Diese Berechnung für den allgemeinen Fall durch-

zuführen, wäre umständlich und zwecklos. Für die speziellen Fälle $n = 2$ und $n = 3$ haben wir sie bereits in § 4, 7 ausgeführt.

Wir haben das Resultat:

Die Funktion $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ läßt sich als lineare Funktion der p-Funktion und ihrer $n - 2$ ersten Ableitungen darstellen in der Form:

$$f^{n}_{\alpha\beta}(w) = c_0\, p^{(n-2)}(w) + c_1\, p^{(n-3)}(w) + \cdots + c_{n-2}\, p(w) + c_{n-1}\,.$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ lassen sich in jedem gegebenen Fall nach den Formeln (2) sämtlich berechnen.

## 2. Determinantendarstellung von $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$

nach Kiepert: „Ganzzahlige Multiplikation der elliptischen Funktionen". Crelles Journal Band 76 S. 29 ff.

Die in Formel (1) auftretenden Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ kann man auch auf einem anderen Wege bestimmen. Aus den Ausführungen des § 3 wissen wir, daß $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ für $w = \Omega_{\alpha\beta}$ zur n ten Ordnung verschwindet. Nach einem bekannten Satz der Algebra verschwinden dann auch die $n - 1$ ersten Ableitungen von $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ für $w = \Omega_{\alpha\beta}$. Bilden wir von Gleichung (1) die $n - 1$ ersten Ableitungen und setzen überall $w = \Omega_{\alpha\beta}$ ein, so erhalten wir, wenn wir wieder

$$p(\Omega_{\alpha\beta}) = \eta\ ;\ p^{(n)}(\Omega_{\alpha\beta}) = \eta^{(n)}$$

setzen, das folgende Gleichungensystem

$$\begin{aligned}
0 &= c_0\,\eta^{(n-2)} + c_1\,\eta^{(n-3)} + \cdots + c_{n-2}\,\eta + c_{n-1}\\
0 &= c_0\,\eta^{(n-1)} + c_1\,\eta^{(n-2)} + \cdots + c_{n-2}\,\eta'\\
&\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}\\
&\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}\\
0 &= c_0\,\eta^{(2n-3)} + c_1\,\eta^{(2n-4)} + \cdots + c_{n-2}\,\eta^{(n-1)}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die $n - 1$ letzten dieser Gleichungen bilden ein System homogener linearer Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten. Damit diese Gleichungen eine Lösung haben, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante der Koeffizienten verschwindet.

Sie haben aber, wie unter 1 gezeigt wurde, eine ganz bestimmte Lösung. Also muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden, d. i.

$$\begin{vmatrix} \eta^{(n-1)}, & \eta^{(n-2)}, \cdots \eta' \\ \vdots & \\ \eta^{(2n-3)}, & \eta^{(2n-4)}, \cdots \eta^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Entwickeln wir diese Determinante nach den Elementen der ersten Spalte, so folgt

$$\eta^{(n-1)} \cdot H^{(n-1)} + \eta^{(n)} \cdot H^{(n)} + \cdots + \eta^{(2n-3)} H^{(2n-3)} = 0 ,$$

wenn $H^{(n-1)}, \cdots, H^{(2n-3)}$ die zu jedem Element $\eta^{(n-1)}, \cdots, \eta^{(2n-3)}$ gehörige Unterdeterminante ist. Die H genügen der letzten Gleichung des Systems (3) und, wie man leicht sieht, auch allen übrigen (mit Ausnahme der noch nicht benutzten ersten). Denn setzt man die H in eine dieser Gleichungen ein und schreibt die Gleichung dann wieder in Determinantenform, so stimmen in dieser Determinante zwei Spalten überein, also verschwindet sie. Es wäre das also ein Wertesystem für die Unbekannten: $c_0, \cdots, c_{n-2}$. Es ist das aber noch nicht eindeutig, sondern kann mit einem beliebigen Faktor $\lambda$ multipliziert werden. Tatsächlich gibt es aber nur ein Wertesystem. Der Faktor $\lambda$ muß sich daher aus der Vergleichung eines entsprechenden Koeffizienten in den beiden Entwicklungen bestimmen lassen. In den Formeln (2) war

$$c_0 = \frac{1}{(n-1)!} .$$

Hier dagegen ist

$$c_0 = \lambda \cdot H^{(2n-3)} = \lambda \cdot (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \eta^{(n-2)} \cdots \eta' \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \eta^{(2n-5)} \cdots \eta^{(n-2)} \end{vmatrix} .$$

Daraus ergibt sich

$$\lambda = \frac{(-1)^n}{(n-1)! \begin{vmatrix} \eta^{(n-2)} \cdots \eta' \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \eta^{(2n-5)} \cdots \eta^{(n-2)} \end{vmatrix}} . \tag{4}$$

Multiplizieren wir alle H mit diesem Faktor $\lambda$, so erhalten wir die richtigen Werte: $c_0, c_1, \cdots, c_{n-2}$. Zur Bestimmung des Koeffizienten $c_{n-1}$ dient die erste Gleichung des Systems (3). Es ist

$$(5) \qquad 0 = \lambda H^{(2n-3)} \cdot \eta^{(n-2)} + \cdots + \lambda \cdot H^{(n-1)} \cdot \eta + c_{n-1} .$$

Andererseits ergibt Gleichung (1), wenn wir für $c_0, c_1, \cdots, c_{n-2}$ die berechneten Werte einsetzen

$$f^{n}_{\alpha\beta}(w) = \lambda \cdot H^{(2n-3)} \cdot p^{(n-2)}(w) + \cdots + \lambda H^{(n-1)} \cdot p(w) + c_{n-1} .$$

Subtrahieren wir hiervon die Gleichung (5) und schreiben das Resultat in Determinantenform, so erhalten wir

$$(6)\ f^{n}_{\alpha\beta}(w) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} p^{(n-2)}(w) - \eta^{(n-2)}, & p^{(n-3)}(w) - \eta^{(n-3)}, & \cdots, & p(w) - \eta \\ \eta^{(n-1)} & \eta^{(n-2)} & \cdots, & \eta' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta^{(2n-4)} & \eta^{(2n-5)} & \cdots, & \eta^{(n-2)} \end{vmatrix},$$

wo $\lambda$ durch (4) bestimmt ist.

Diese Darstellung in Determinantenform hat Kiepert in Crelles Journal veröffentlicht.

### 3. Darstellung von $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ durch $p(w)$ und $p'(w)$.

Die wichtigste Darstellung der Funktion $f^{n}_{\alpha\beta}w)$ ist die als rationale Funktion von $p(w)$ und $p'(w)$. Bekanntlich lassen sich alle höheren Ableitungen von $p(w)$ rational durch $p(w)$ und $p'(w)$ ausdrücken, und zwar tritt $p'(w)$ immer nur als Faktor einer rationalen Funktion von $p(w)$ allein auf. Daraus ergibt sich die übrigens auch für jede doppelt periodische Funktion gültige Darstellung von $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$

$$(7) \qquad f^{n}_{\alpha\beta}(w) = K(p) + p' L(p),$$

wo $K(p)$ und $L(p)$ rationale Funktionen von $p(w)$ sind. Die ersten Glieder dieser Funktionen lassen sich wieder mit Hilfe der in § 4, 6 berechneten Koeffizienten $s_1, s_2 \cdots$ leicht angeben.

Wir müssen dabei unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

1. $n = 2m$.

Aus den Formelzusammenstellungen, wie wir sie etwa im

II. und IV. Bande von Tannery et Molk, Eléments de la theorie des fonctions elliptiques finden, ersieht man, daß

$$p^{(2m-2)} = (2m-1)!\, p^m + \cdots$$

$$p^{(2m-3)} = p'(w) \cdot \frac{1}{2}[(2m-2)!\, p^{m-2} + \cdots]$$

$$p^{(2m-4)} = (2m-3)!\, p^{m-1} + \cdots$$

usw.

ist. Multiplizieren wir der Reihe nach mit den durch (2) bestimmten Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ und fassen den Ausdruck mit $p'(w)$ als Faktor als Funktion $L(p)$, das übrige als $K(p)$ zusammen, so ergibt sich durch leichte Rechnung

$$\text{(8 a)} \qquad \begin{aligned} K(p) &= p^m - m(\eta - 2m\zeta^2)\, p^{m-1} + \cdots \\ L(p) &= -m\zeta\, p^{m-2} + \cdots, \end{aligned}$$

also wenn wir einsetzen

$$\text{(7 a)} \qquad f_{\alpha\beta}^{2m}(w) = [p^m - m(\eta - 2m\zeta^2)\, p^{m-1} + \cdots] + p'[-m\zeta\, p^{m-2} + \cdots].$$

In jedem speziellen Fall gestaltet sich die weitere Ausrechnung verhältnismäßig einfach.

2. $n = 2m+1$.

Auf genau dieselbe Weise erhalten wir

$$\text{(8 b)} \qquad \begin{aligned} K(p) &= -(2m+1)\cdot\zeta\, p^m + \cdots \\ L(p) &= \frac{1}{2}\, p^m - \frac{2m+1}{4}(\eta - (2m+1)\zeta^2)\, p^{m-2} + \cdots, \end{aligned}$$

also wenn wir einsetzen

$$\text{(7 b)} \qquad \begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{2m+1}(w) = {} & [-(2m+1)\cdot\zeta\, p^m + \cdots] \\ & + p'\left[\frac{1}{2}\, p^m - \frac{2m+1}{4}(\eta - (2m+1)\zeta^2)\, p^{m-2} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Wir haben das Resultat:

Die doppelt periodische Funktion $f_{\alpha\beta}^{n}(w)$ läßt sich stets in der Form

$$f_{\alpha\beta}^{n}(w) = K(p) + p'\, L(p)$$

darstellen, wobei $K(p)$ und $L(p)$ rationale Funktionen

von $\mathfrak{p}(w)$ sind, die nach dem oben angegebenen Verfahren vollständig berechnet werden können.

Dies ist die einfachste und wichtigste Darstellung von $f^{n}_{\alpha\beta}(w)$ durch die $\mathfrak{p}$-Funktion.

§ 6.

## Eine Hilfsuntersuchung über die $\lambda$-Funktion.

Es ist unser Ziel, für die Funktion $f_{\alpha\beta}w)$, für die wir bisher nur eine Darstellung durch $\vartheta$-Quotienten kennen, analog der in § 2 gegebenen Summendarstellung von $f'_{\alpha\beta}(w)$ einen Ausdruck in Form einer Doppelsumme über bekannte Funktionen abzuleiten. Dazu ist erforderlich, wie sich später zeigen wird, daß wir die Funktion $\lambda(w)$ durch $\Lambda(w)$ ausdrücken und umgekehrt, wenn $\Lambda(w)$ gemäß der in § 1, 4 getroffenen Festsetzung die $\lambda$-Funktion für $\Pi_\Omega$ ist. Wir wollen diese Aufgabe um so lieber zu lösen suchen, als eine funktionentheoretische Behandlung des Transformationsproblems und seine Umkehrung für die Funktion $\lambda(w)$ und damit für $\vartheta(w)$ selber auch für sich einiges Interesse beanspruchen kann.

### 1. Darstellung von $\lambda(w)$ durch $\Lambda(w)$.

Wir greifen zurück auf die in § 2, 6 abgeleitete Formel (11)

$$\mathfrak{p}(w) = P(w) + \sum_{\varkappa,\lambda}{}' (P(w + \omega_{\varkappa\lambda}) - P(\omega_{\varkappa\lambda}).$$

Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\gamma = \sum_{\varkappa,\lambda}{}' P(\omega_{\varkappa\lambda}),$$

so können wir dafür schreiben

$$(1) \qquad \mathfrak{p}(w) + \gamma = P(w) + \sum_{\varkappa,\lambda}{}' P(w + \omega_{\varkappa\lambda}) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} P(w + \omega_{\varkappa\lambda}).$$

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, gelten die Beziehungen

$$(2) \qquad \mathfrak{p}(w) = c - \lambda'(w);\ P(w) = C - \Lambda'(w). \quad \text{(Einl. (8).)}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (1) ein, so erhalten wir nach leichter Umformung

$$(1') \qquad \lambda'(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda'(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + c + \gamma - a\cdot b\cdot C.$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$(1'') \qquad \lambda(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + (c + \gamma - a\,b\,C)\,w + c_1,$$

wo $c_1$ die Integrationskonstante ist. Wir vermehren in (1'') w um $\Omega_1 = a\,\omega_1$. Dann finden wir, wenn wir das bekannte Verhalten der $\lambda$-Funktion gegenüber den Perioden berücksichtigen,

$$\lambda(w + \Omega_1) = \lambda(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + (c + \gamma - a\,b\,C)\,w + (c + \gamma - a\,bC)\,\Omega_1 + c_1.$$

Aus der Vergleichung mit (1'') folgt

$$\Omega_1 \cdot (c + \gamma - a\,b\,C) = 0,$$

und da $\Omega_1 \neq 0$ ist,

$$(3) \qquad c + \gamma - a\,b\,C = 0 \text{ oder } \gamma = a\,b\,C - c,$$

so daß wir für (1'') jetzt schreiben können

$$(4) \qquad \lambda(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + c_1.$$

Durch einen Kunstgriff gelingt es uns, auch die Konstante $c_1$ zu bestimmen. Ersetzen wir in (4) w durch $w - (a-1)\,\omega_1 - (b-1)\,\omega_2$, so erhalten wir auf der linken Seite

$$(5\,a) \quad \lambda(w - (a-1)\,\omega_1 - (b-1)\,\omega_2) = \lambda(w) + (b-1)\,\frac{2\pi i}{\omega_1}.$$

Auf der rechten Seite ergibt sich

$$(5\,b) \quad c_1 + \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda} - (a-1)\,\omega_1 - (b-1)\,\omega_2) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w - \omega_{\varkappa\lambda}) + c_1.$$

Setzen wir (5 a) und (5 b) gleich, so gibt das

$$\lambda(w) + (b-1)\,\frac{2\pi i}{\omega_1} = \sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w - \omega_{\varkappa\lambda}) + c_1.$$

Ersetzen wir darin w durch $-w$, so erhalten wir

$$-\lambda(w) + (b-1)\,\frac{2\pi i}{\omega_1} = -\sum_{\varkappa=0}^{a-1} \sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + c_1,$$

und wenn wir für die auf der rechten Seite stehende Doppelsumme aus (4) ihren Wert einführen,

$$-\lambda(w)+(b-1)\frac{2\pi i}{\omega_1}=-\lambda(w)+c_1+c_1.$$

Daraus folgt

$$c_1=(b-1)\frac{\pi i}{\omega_1}.$$

Wir setzen diesen Wert in (4) ein und erhalten die gesuchte Darstellung von $\lambda(w)$ durch $\Lambda(w)$

$$\lambda(w)=(b-1)\frac{\pi i}{\omega_1}+\sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1}\Lambda(w+\omega_{\varkappa\lambda}). \tag{6}$$

Anm. Durch abermalige Integration nach w würde sich die Darstellung von $\vartheta(w)$ durch $\Theta(w)$, also die Lösung des Transformationsproblems der $\vartheta$-Funktion auf rein funktionentheoretischem Wege ergeben. Doch würde uns das zu weit führen.

## 2. Darstellung von $\Lambda(w)$ durch $\lambda(w)$.

Nicht minder elegant gestaltet sich das umgekehrte Problem $\Lambda(w)$ durch $\lambda(w)$ auszudrücken. In § 2, 5 hatten wir die Beziehung abgeleitet:

$$a\cdot b\cdot P(w)=\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{\beta=0}^{b-1}\varphi_{\alpha\beta}(w)=\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{\beta=0}^{b-1}f'_{\alpha\beta}(w)$$

$$=f'_{00}(w)+\sum_{\alpha,\beta}{}'f'_{\alpha\beta}(w).$$

Da nach § 2, 6 $f'_{00}(w)=p(w)+\gamma$ ist, so können wir schreiben:

$$a\,b\,P(w)=p(w)+\gamma+\sum_{\alpha,\beta}{}'f'_{\alpha\beta}(w). \tag{7}$$

Nach (2) folgt daraus

$$a\cdot b\,C-a\,b\,\Lambda'(w)=c-\lambda'(w)+\gamma+\sum_{\alpha,\beta}{}'f'_{\alpha\beta}(w).$$

Nach (3) ist $a\,b\,C-c-\gamma=0$, also ist

$$a\,b\,\Lambda'(w)=\lambda'(w)-\sum_{\alpha,\beta}{}'f'_{\alpha\beta}(w),$$

und wenn wir integrieren,

$$(8) \qquad a\,b\,\Lambda(w) = \lambda(w) - \sum_{\alpha,\beta}{}' f_{\alpha\beta}(w) + c_2 .$$

Um die Integrationskonstante $c_2$ zu bestimmen, ersetzen wir in (8) w durch $w + \omega_{\varkappa\lambda}$ und erhalten

$$a\,b\,\Lambda(w+\omega_{\varkappa\lambda}) = \lambda(w) - \frac{2\pi i\lambda}{\omega_1} - \sum_{\alpha,\beta}{}' \varrho^{\varkappa}\sigma^{\lambda} f_{\alpha\beta}(w) + c_2 .$$

Wir summieren über $\varkappa$ und $\lambda$ und bekommen

$$a\,b\cdot\sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1}\Lambda(w+\omega_{\varkappa\lambda})$$

$$= a\,b\cdot\lambda(w) - \frac{a\,b\,(b-1)\pi i}{\omega_1} - \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1}\sum_{\alpha,\beta}{}' \varrho^{\varkappa}\sigma^{\lambda} f_{\alpha\beta}(w) + a\,b\,c_2 .$$

Für den Ausdruck links setzen wir seinen Wert aus (6) ein und erhalten

$$a\,b\,\lambda(w) - a\,b\frac{(b-1)\pi i}{\omega_1}$$

$$= a\,b\,\lambda(w) - \frac{a\,b\,(b-1)}{\omega_1}\pi i - \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1}\sum_{\alpha,\beta}{}' f_{\alpha\beta}(w)\,\varrho^{\varkappa}\sigma^{\lambda} + a\,b\,c_2 .$$

Daraus folgt

$$a\cdot b\cdot c_2 = \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1}\sum_{\alpha,\beta}{}' \varrho^{\varkappa}\sigma^{\lambda} f_{\alpha\beta}(w) .$$

Diese vierfache Summe läßt sich ganz leicht auswerten. Jeder Ausdruck $\sigma^{\lambda} f_{\alpha\beta}(w)$, in dem $\alpha \neq 0$ ist, hat den Faktor

$$1 + \varrho^{\varkappa} + \varrho^{2\varkappa} + \cdots + \varrho^{(a-1)\varkappa} = 0 ,$$

da $\varrho \neq 1$ ist.

Ist aber $\alpha = 0$, so ist nach § 2, 4 Formel (7 a):

$$\sigma = e^{2\pi i\frac{\beta}{b}},$$

wo $\beta \neq 0$ sein muß, denn $\alpha$ und $\beta$ dürfen nicht zugleich verschwinden. Von unserer vierfachen Summe sind nur noch übrig die Funktionen $f_{0\beta}(w)$ und diese sind multipliziert mit dem Faktor

$$1 + \sigma^{\lambda} + \sigma^{2\lambda} + \cdots + \sigma^{(b-1)\lambda} = 0 ,$$

da $\sigma \neq 1$ und eine b te Einheitswurzel ist. In unserer vierfachen Summe hat jeder Summand den Faktor Null. Also folgt

$$c_2 = 0,$$

und wir erhalten schließlich

$$(9) \qquad a\,b\,\Lambda(w) = \lambda(w) - \sum_{\alpha,\beta}{}' f_{\alpha\beta}(w).$$

Wir haben das Resultat:

Zwischen den Funktionen $\lambda(w)$ und $\Lambda(w)$ bestehen die Beziehungen

$$(6) \qquad \lambda(w) = (b-1)\frac{\pi i}{\omega_1} + \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}),$$

$$(9) \qquad a \cdot b\,\Lambda(w) = \lambda(w) - \sum_{\alpha,\beta}{}' f_{\alpha\beta}(w).$$

§ 7.

## Darstellung von $f_{\alpha\beta}(w)$ als Summe von $\Lambda$-Funktionen. Auswertung des Integrals $\int f_{\alpha\beta}(w)\,dw$.

### 1. Vorbemerkung.

Um $f_{\alpha\beta}(w)$ als Summe von $\Lambda$-Funktionen darzustellen, wäre es das Naheliegendste, die in § 2, 3 aufgestellte Definitionsformel

$$\varphi_{\alpha\beta}(w) = f'_{\alpha\beta}(w) = \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa}\sigma^{-\lambda} P(w + \omega_{\varkappa\lambda})$$

zu benutzen, darin $P(w) = C - \Lambda'(w)$ zu setzen und zu integrieren. Wir würden dann erhalten

$$f_{\alpha\beta}'(w) = C \cdot \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa}\sigma^{-\lambda} - \sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa}\sigma^{-\lambda}\Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}).$$

Da $\alpha$ und $\beta$ nicht zugleich verschwinden sollen, wird

$$\sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa}\sigma^{-\lambda} = 0,$$

also, wenn wir integrieren

$$f_{\alpha\beta}(w) = -\sum_{\varkappa=0}^{a-1}\sum_{\lambda=0}^{b-1} \varrho^{-\varkappa}\sigma^{-\lambda}\Lambda(w + \omega_{\varkappa\lambda}) + c_0.$$

Aus dieser Form läßt sich aber anscheinend die Integrationskonstante $c_0$ nicht bestimmen. Wir müssen daher einen gänzlich anderen Weg einschlagen, der uns mit einem Schlage zum Ziele führen wird.

Dabei wird für uns die Formel (9) des § 6 von größter Wichtigkeit sein.

## 2. Umformung der Formel (9) des § 6.

Wir ersetzen in der Gleichung (9) des § 6 w durch $w + \omega_{\mu\nu}$. Das gibt uns

$$a\,b\,\Lambda(w + \omega_{\mu\nu}) = \lambda(w) - \frac{2\pi i\,\nu}{\omega_1} - \sum_{\alpha=0}^{a-1}{}' \sum_{\beta=0}^{b-1} \varrho^{\mu}\,\sigma^{\nu} \cdot f_{\alpha\beta}(w).$$

Um später das Resultat in der gewohnten Form zu erhalten, wechseln wir hier die Bezeichnung und schreiben $\alpha'$ statt $\alpha$ und $\beta'$ statt $\beta$, also

$$\varrho' = e^{2\pi i \frac{\alpha'}{a}} \text{ statt } \varrho \text{ und}$$

$$\sigma' = e^{2\pi i \frac{a\beta' - c\alpha'}{a\,b}} \text{ statt } \sigma.$$

Dann lautet unsere Gleichung

$$a\,b\,\Lambda(w + \omega_{\mu\nu}) = \lambda(w) - \frac{2\pi i\,\nu}{\omega_1} - \sum_{\alpha'=0}^{a-1}{}' \sum_{\beta'=0}^{b-1} \varrho'^{\mu}\,\sigma'^{\nu}\,f_{\alpha'\beta'}(w).$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $\varrho^{-\mu} \cdot \sigma^{-\nu}$, wo

$$\varrho = e^{2\pi i \frac{\alpha}{a}}$$

$$\sigma = e^{2\pi i \frac{a\beta - c\alpha}{a\,b}}$$

ist, und summieren über $\mu$ von $0, \cdots, a-1$ und über $\nu$ von $0, \cdots, b-1$. Dann erhalten wir

$$(1) \quad a \cdot b \sum_{\mu=0}^{a-1} \sum_{\nu=0}^{b-1} \varrho^{-\mu} \cdot \sigma^{-\nu}\,\Lambda(w + \omega_{\mu\nu})$$

$$= \lambda(w) \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{2\pi i}{\omega_1}\,\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha'=0}^{a-1}{}' \sum_{\beta'=0}^{b-1} \Theta_{\alpha\beta}\,f_{\alpha'\beta'}(w),$$

wenn wir

$$(2)\qquad \sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\varrho^{-\mu}\sigma^{-\nu}=\varepsilon_{\alpha\beta};\quad \sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\nu\cdot\varrho^{-\mu}\sigma^{-\nu}=\delta_{\alpha\beta};$$

$$\sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\nu}=\Theta_{\alpha\beta}$$

setzen.

### 3. Auswertung der Summen $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\delta_{\alpha\beta}$, $\Theta_{\alpha\beta}$.

Am einfachsten ergibt sich $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Es ist

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\varrho^{-\mu}\sigma^{-\nu}=\sum_{\nu=0}^{b-1}\sigma^{-\nu}\left(1+\frac{1}{\varrho}+\cdots+\frac{1}{\varrho^{a-1}}\right).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle

1. $\alpha\neq 0$, d. h. $\alpha=1, 2, \cdots, a-1$,

dann ist $\varrho\neq 1$, und es wird

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=0$$

nach dem bekannten Satz über die von 1 verschiedenen Einheitswurzeln.

2. $\alpha=0$. Dann muß $\beta=1, 2, \cdots, b-1$ sein. Ferner ist $\varrho=1$, also

$$1+\frac{1}{\varrho}+\cdots+\frac{1}{\varrho^{a-1}}=a,$$

und es folgt

$$\varepsilon_{0\beta}=a\left(1+\frac{1}{\sigma}+\cdots+\frac{1}{\sigma^{b-1}}\right)=0,$$

da $\sigma=e^{2\pi i\frac{\beta}{b}}$ eine von 1 verschiedene $b$te Einheitswurzel ist.

Für jeden zulässigen Wert von $\alpha$ und $\beta$ ist

$$(3)\qquad \varepsilon_{\alpha\beta}=0.$$

Verhältnismäßig leicht finden wir auch die dritte Summe $\Theta_{\alpha\beta}$. Es ist nämlich

$$\Theta_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\mu}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{b-1}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\nu}\cdot\left(1+\frac{\varrho'}{\varrho}+\cdots+\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{a-1}\right).$$

Dabei ist

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = e^{2\pi i \frac{\alpha' - \alpha}{a}}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle,

1. $\alpha' \neq \alpha$, dann ist $\frac{\varrho'}{\varrho} \neq 1$, also $\Theta_{\alpha\beta} = 0$

nach der bekannten Schlußweise.

2. $\alpha' = \alpha$. Dann ist $\frac{\varrho'}{\varrho} = 1$, und wir erhalten

$$\Theta_{\alpha\beta} = a\left(1 + \frac{\sigma'}{\sigma} + \cdots + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{b-1}\right),$$

wo jetzt

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = e^{2\pi i \frac{\beta' - \beta}{b}}$$

ist. Wir haben zwei weitere Fälle zu unterscheiden

a) $\beta' \neq \beta$. Dann ist wieder $\frac{\sigma'}{\sigma} \neq 1$, also

$$\Theta_{\alpha\beta} = 0.$$

b) $\beta' = \beta$. Es folgt $\frac{\sigma'}{\sigma} = 1$, also

$$\Theta_{\alpha\beta} = a \cdot b.$$

Das bedeutet

In der Summe $\sum_{\alpha'=0}^{a-1} \sum_{\beta'=0}^{b-1} \Theta_{\alpha\beta} f_{\alpha'\beta'}(w)$ hat nur diejenige Funktion $f_{\alpha'\beta'}(w)$, für die $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ ist, den von null verschiedenen Faktor $ab$; alle anderen haben den Faktor null. Es wird also

$$\sum_{\alpha'=0}^{a-1} \sum_{\beta'=0}^{b-1} \Theta_{\alpha\beta} f_{\alpha'\beta'}(w) = a \cdot b \cdot f_{\alpha\beta}(w). \tag{4}$$

Die Ausführung der noch fehlenden Summe $\delta_{\alpha\beta}$ gestaltet sich etwas weitläufiger. Es war

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=0}^{a-1} \sum_{\nu=0}^{b-1} \nu \cdot \varrho^{-\mu \cdot \sigma^{-\nu}} = \sum_{\nu=0}^{b-1} \nu \cdot e^{-\nu\left(\frac{\beta}{b} - \frac{c\alpha}{ab}\right)2\pi i} \cdot \sum_{\mu=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha}{a} \cdot \mu}.$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle

1. $\alpha \neq 0$, also $\alpha = 1, 2, \cdots, a-1$. Dann ist

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} e^{-2\pi i \frac{\alpha}{a} \cdot \mu} = 0,$$

wie vorher, also folgt

$$\delta_{\alpha\beta} = 0.$$

2. $\alpha = 0$, $\beta = 1, 2, \cdots, b-1$.

In diesem Falle ergibt sich

$$\delta_{0\beta} = a \cdot \sum_{\nu=0}^{b-1} \nu \cdot e^{-\nu \frac{\beta}{b} \cdot 2\pi i}.$$

Für einen Augenblick setze ich

$$-\frac{\beta}{b} 2\pi i = x,$$

dann ist

$$\delta_{0\beta} = a \sum_{\nu=0}^{b-1} \nu \cdot e^{\nu x} = a \cdot \frac{d}{dx} \left( \sum_{\nu=0}^{b-1} e^{\nu x} \right)$$

$$= a \cdot \frac{d}{dx} \left( \sum_{\nu=0}^{b-1} (e^x)^\nu \right) = a \cdot \frac{d}{dx} (1 + e^x + \cdots + e^{x(b-1)})$$

$$= a \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{bx} - 1}{e^x - 1} \right).$$

Wir differenzieren[1]) aus und erhalten

$$\delta_{0\beta} = a \cdot \frac{b \cdot e^{xb}}{e^x - 1} - \frac{e^x (e^{bx} - 1)}{(e^x - 1)^2} = a \cdot \frac{b}{e^x - 1},$$

da $e^{bx} = e^{-2\pi i \beta} = 1$ ist.

Also folgt

$$\delta_{0\beta} = a\, b \frac{1}{e^x - 1}.$$

Setzen wir für x seinen Wert ein und kehren das Vorzeichen um, so folgt:

---

[1]) Dieser Kunstgriff, den mir Herr Prof. Wellstein mitteilte, dürfte wohl von Christoffel herrühren.

$$\delta_{0\beta} = -\,a\,b\,\frac{1}{1 - e^{-2\pi i\frac{\beta}{b}}}$$

$$= -\,a\,b\cdot\frac{e^{\pi i\frac{\beta}{b}}}{e^{\pi i\frac{\beta}{b}} - e^{-\pi i\frac{\beta}{b}}},$$

wenn ich im Zähler und Nenner mit $e^{\pi i\frac{\beta}{b}}$ multipliziere. Dafür kann ich ferner schreiben

$$\delta_{0\beta} = -\frac{a\,b}{2\,i}e^{\pi i\frac{\beta}{b}}\cdot\frac{2\,i}{e^{\pi i\frac{\beta}{b}} - e^{-\pi i\frac{\beta}{b}}}$$

$$= -\frac{a\,b}{2\,i}e^{\pi i\frac{\beta}{b}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{b}\pi}.$$

Ferner ist $e^{\pi i\frac{\beta}{b}} = \cos\frac{\beta}{b}\pi + i\sin\frac{\beta}{b}\pi$, also folgt

$$\delta_{0\beta} = -\frac{a\,b}{2\,i}\frac{\cos\frac{\beta}{b}\pi + i\sin\frac{\beta}{b}\pi}{\sin\frac{\beta}{b}\pi}$$

$$= -\frac{a\,b}{2\,i}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi - \frac{a\,b}{2}.$$

Definiere ich eine Größe $e_{\mu\nu}$ so, daß

$$e_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{„ } \mu \neq \nu \end{cases}$$

sein soll, so kann ich schreiben

$$\delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha 0}\cdot\delta_{0\beta} = e_{\alpha 0}\cdot\left(-\frac{a\,b}{2\,i}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi - \frac{a\,b}{2}\right). \tag{5}$$

Denn für $\alpha \neq 0$ wird dann

$$\delta_{\alpha\beta} = 0.$$

Für $\alpha = 0$ dagegen wird

$$\delta_{\alpha\beta} = -\frac{a\,b}{2\,i}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi - \frac{a\,b}{2} = \delta_{0\beta}.$$

## 4. Darstellung von $f_{\alpha\beta}(w)$ als Summe von $\Lambda$-Funktionen.

Ich wende jetzt die in 3 erzielten Resultate auf Gleichung (1) an. Wir hatten erhalten:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$$

$$\delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha 0}\,\delta_{0\beta} = e_{\alpha 0}\left(-\frac{a\,b}{2\,i}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi - \frac{a\,b}{2}\right)$$

$$\sum_{\alpha'=0}^{a-1}{}' \sum_{\beta'=0}^{b-1} \Theta_{\alpha\beta}\, f_{\alpha'\beta'}(w) = a\,b\cdot f_{\alpha\beta}(w)\,.$$

In Gleichung (1) eingesetzt, ergibt das

$$a\,b\sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1} \varrho^{-\mu}\cdot\sigma^{-\nu}\Lambda(w+\omega_{\mu\nu}) = -\frac{2\pi i}{\omega_1}e_{\alpha 0}\left(-\frac{a\,b}{2\,i}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi - \frac{a\,b}{2}\right) - a\,b\,f_{\alpha\beta}(w)$$

$$= a\,b\left[e_{\alpha 0}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi + \frac{\pi i}{\omega_1}\right) - f_{\alpha\beta}(w)\right].$$

Kürzen wir a·b auf beiden Seiten weg und lösen nach $f_{\alpha\beta}(w)$ auf, so erhalten wir die gewünschte Darstellung,

$$(6)\quad f_{\alpha\beta}(w) = e_{\alpha 0}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{b}\pi + \frac{\pi i}{\omega_1}\right) - \sum_{\mu=0}^{a-1}\sum_{\nu=0}^{b-1}\varrho^{-\mu}\sigma^{-\nu}\Lambda(w+\omega_{\mu\nu})\,.$$

Hiermit ist die in 1. auftretende Integrationskonstante $c_0$ für jeden Fall bestimmt und die Behandlung der Funktionen $f_{\alpha\beta}(w)$ und $f'_{\alpha\beta}(w)$ gleichmäßig zu Ende geführt.

## 5. Das Integral: $\int f_{\alpha\beta}(w)\,dw$.

Die Gleichung (6) liefert uns eine sehr einfache Auswertung eines ziemlich komplizierten Integrals. Wir müssen dazu die Gleichung etwas umformen. In § 5. 3 war die Beziehung

$$f^n_{\alpha\beta}(w) = K(p) + p' L(p)$$

abgeleitet worden. Ziehen wir die n te Wurzel, so folgt, wenn wir berücksichtigen, daß

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

ist

$$(7)\quad f_{\alpha\beta}(w) = \sqrt[n]{K(p) + L(p)\cdot\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\mathrm{d\,p}}{\mathrm{d\,w}} = \mathrm{p'} = \sqrt{4\,\mathrm{p}^3 - \mathrm{g}_2\,\mathrm{p} - \mathrm{g}_3}\,,$$

also

$$\mathrm{d\,w} = \frac{\mathrm{d\,p}}{\sqrt{4\,\mathrm{p}^3 - \mathrm{g}_2\,\mathrm{p} - \mathrm{g}_3}}\,. \tag{7 a}$$

Berücksichtigen wir ferner, daß

$$\int \Lambda\,(\mathrm{w})\,\mathrm{d\,w} = \ln \Theta\,(\mathrm{w})$$

ist, wo $\Theta\,(\mathrm{w})$, der Festsetzung der Einleitung gemäß, die $\vartheta$-Funktion in $\Pi_\Omega$ ist, so erhalten wir, wenn wir Gleichung (6) integrieren und aus (7) und (7 a) die Werte einsetzen

$$\int^{\mathrm{n}} \sqrt{\mathrm{K}\,(\mathrm{p}) + \mathrm{L}\,(\mathrm{p})\sqrt{4\,\mathrm{p}^3 - \mathrm{g}_2\,\mathrm{p} - \mathrm{g}_3}} \cdot \frac{\mathrm{d\,p}}{\sqrt{4\,\mathrm{p}^3 - \mathrm{g}_2\,\mathrm{p} - \mathrm{g}_3}} \tag{8}$$

$$= \mathrm{e}_{\alpha 0}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{\mathrm{b}}\,\pi + \frac{\pi\,\mathrm{i}}{\omega_1}\right)\mathrm{w} - \sum_{\mu=0}^{\mathrm{a}-1}\sum_{\nu=0}^{\mathrm{b}-1} \varrho^{-\mu}\,\sigma^{-\nu} \ln \Theta(\mathrm{w} + \omega_{\mu\nu}) + \mathrm{const.}\,.$$

Hierin sind $\mathrm{K}\,(\mathrm{p})$ und $\mathrm{L}\,(\mathrm{p})$ wohlbestimmte, ganze rationale Funktionen von $\mathrm{p}\,(\mathrm{w})$.

---

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

## Lebenslauf.

Geboren wurde ich am 5. Juni 1891 in Waghäusel (Baden). Nachdem ich zuerst eine Privatschule in Frellstedt (Braunschweig) besucht hatte, trat ich im Mai 1901 in das Alte Gymnasium zu Bremen ein und legte daselbst im März 1909 die Reifeprüfung ab. Sodann studierte ich Mathematik und Physik, und zwar vier Semester in München und eins in Berlin. Seit Oktober 1911 studiere ich an der Kaiser-Wilhelms-Universität.

Für die mir bei Abfassung der Arbeit gewordene Hilfe bin ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Wellstein, aufs tiefste verpflichtet.